Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria _____ (Corso di Laurea)

prova scritta del 13-6-2003

_____ (Cognome) _____ (Nome) _____ (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^6 + 8 = 0 \\ z^4 + 4z^2 + 4 \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini il polinomio caratteristico di f e gli autovalori, specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Determinare gli autovettori di f.

(iii) Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^4$ tale che $\begin{cases} w \in Im\ f \\ w \notin Ker\ f \end{cases}$

Esercizio 3. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iii) Posto $t = 1$, determinare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \bigoplus Im(f)$