Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria _____ (Corso di Laurea)

prova scritta del 5-2-2003

_____ (Cognome) _____ (Nome) _____ (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = \overline{z}^3 \cdot |z| \\ z^4 + z \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare $\dim(Ker\ f)$, $\dim(Ker\ f^2)$.
(ii) Determinare, se esistono, le soluzioni del sistema

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iii) Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $\begin{cases} w \in Im\ f \\ w \notin Im\ f^2 \end{cases}$

Esercizio 3. Al variare del parametro reale β sia A_β la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 1 & \beta \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(i) Si determini il polinomio caratteristico di A_β e gli autovalori, specificandone la molteplicità algebrica.
(ii) Si determini per quali valori di β la matrice A_β è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.