Esame di Algebra per Ingegneria Gestionale

Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria Informatica

prova scritta del 26-6-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} \overline{z}^3 - 4z = 0 \\ z - \overline{z} \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare una base di $ker(f)$ e una di $Im(f)$.

(ii) **[Ingegneria Gestionale]** Determinare gli autovalori di f, la dimensione degli autospazi e dire se la matrice corrispondente è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

(ii) **[Ingegneria Informatica]** Determinare la forma canonica di Jordan di f.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx + 2ty + 3z \\ tx + tz \\ 2x + y + 3z \end{pmatrix}$$

(i) Si determini per quali valori di t f_t è iniettiva.

(ii) Si determini per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Si determini per quali valori di t esiste un'unica soluzione del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.[Ingegneria Informatica] Si determini il numero di soluzioni intere ≤ 1540 del sistema

$$\begin{cases} 7^x + 5 \equiv 0 \quad (mod\ 29) \\ (x, 55) = 11 \end{cases}$$

Esercizio 5.[Ingegneria Informatica] Sia $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ il seguente prodotto scalare

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

i) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
ii) Dire se tale prodotto scalare è definito.
iii) Determinare, se esiste, un vettore v tale che $\langle\ v,\ v\rangle = -4$.