Esame di Algebra
Ingegneria gestionale
prova scritta del 17-1-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^6+64=0 \\ z^3 \neq 4\overline{z} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -3x-3z \\ -y+2z \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.

(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di f.

(iii) Dire se $\mathbf{R}^3 = Ker(f) \bigoplus Im(f)$.

(iv) [**Facoltativo**] Dire se f è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale t si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + & tx_2 & +2x_3 & = t+1 \\ tx_1 & & +tx_3 & = t \\ tx_1 + & -tx_2 + & x_3 & = t \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i valori di t per cui

(i) il sistema ha un'unica soluzione.

(ii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 1.

(iii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 2.

(iv) il sistema non ha soluzione.

Esame di Geometria e Algebra

Ingegneria Informatica

prova scritta del 17-1-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^6 + 64 = 0 \\ z^3 \neq 4\overline{z} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x - 3z \\ -y + 2z \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.
(ii) Determinare la forma canonica di Jordan e una base di Jordan per f.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale t si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + & tx_2 & +2x_3 & = t+1 \\ tx_1 & & +tx_3 & = t \\ tx_1 + & -tx_2 + & x_3 & = t \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i valori di t per cui

(i) il sistema ha un'unica soluzione.

(ii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 1.

(iii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 2.

(iv) il sistema non ha soluzione.

Esercizio 4. Si determinino le soluzione intere del sistema

$$\begin{cases} x^3 \equiv 3 \pmod{24} \\ x^2 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dei polinomi di grado ≤ 2 e sia $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ l' applicazione definita da

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

(i) Dimostrare che $\langle\ ,\ \rangle$ è un prodotto scalare.
(ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
(iii) Dire se tale prodotto scalare è definito.