GEOMETRIA

Prof. Mauro Di Nasso. Ricevimento: Martedì 15:30 – 18:00
(Studio 41, Matematica)

www.dm.unipi.it/~dinasso

TESTO: Gilbert Strang "Introduction to linear algebra" 4th edition
Wellesley – Cambridge Press 2009
Versione italiana: "Algebra lineare"
Apogeo 2008.
Consigliato: Accascina – Monti "Geometria"

$\boxed{\text{I}^a \text{ LEZIONE } 29/09/14}$

SIMBOLOGIA

(A) $\wedge$ (e) $\vee$ (o) $\Longrightarrow$ (se...allora) $\Longleftrightarrow$ (se e solo se) $\neg$ ③ (non)

(B) Quantificatori:

$\exists$ ① (esiste) $\forall$ ② (per ogni)

ES ① $\forall a,b \in \mathbb{R} \; (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

ES ② $\exists a,b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 \neq a^2+b^2$

ES ③ l'insieme dei numeri naturali non ha massimo:

$\neg \exists x \in \mathbb{N} \;\; \forall y \in \mathbb{N} : x \geq y$

equivale a

$\forall x \in \mathbb{N} \;\; \exists y \in \mathbb{N} : x < y$

$\underset{\text{ipotesi}}{A} \Longrightarrow \underset{\text{tesi}}{B}$ $\begin{cases} A \text{ è condizione \underline{sufficiente} affinché } B \\ B \text{ è condizione \underline{necessaria} affinché } A \end{cases}$

ES.

"italiano $\Longrightarrow$ europeo" significa che "italiano è CONDIZIONE SUFFICIENTE per essere europeo", e anche che "europeo è CONDIZIONE NECESSARIA per essere italiano"

"$\neg B \Longrightarrow \neg A$" (contronominale)
equivale a "$A \Rightarrow B$"

ES.

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ ("$x=-2 \vee x=2$")

Scrivendo $x=\pm 2$ si intende:

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = 4$$

ES.

$\forall x \; \sqrt{x^2} = x$ è FALSA, dunque è vera la sua negazione "$\exists x \in \mathbb{R} \; \sqrt{x^2} \neq x$"
(ad esempio, $x=-3$)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ è l'insieme dei numeri NATURALI.

INSIEMI. Si possono denotare in tre modi diversi:

$A = \{3, 5, 7\}$ PER ELENCAZIONE (sta a indicare un insieme finito)

$A = \{ m \in \mathbb{N} \mid$ "m è un numero pari o dispari < 10" $\}$ PER PROPRIETA'

cioè " m pari " $\wedge$ " m dispari " $\wedge$ " $m < 10$ "

$B = \{ m^2 / m \in \mathbb{N} \}$ IN MODO FUNZIONALE (in questo caso abbiamo usato la funzione "quadrato")

PROPRIETÀ DEGLI INSIEMI

Due insiemi A e B sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, cioè valgono entrambe le inclusioni:

① $A \subseteq B \quad \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

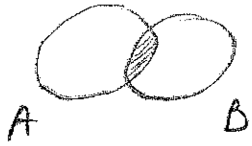
② $B \subseteq A \quad \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$

NB

$\subseteq$ sta a indicare sottoinsieme

$C = A \cup B$ unione

$D = A \cap B$ intersezione



$A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$

$A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\quad m \quad m+1$ (ogni numero ha un successore)

$\mathbb{Z}$ numeri interi $\{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, \dots \}$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali $\left\{ \frac{k}{m} \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{N} \\ m \neq 0 \end{array} \right\}$

$\mathbb{R}$ numeri reali

OPPOSTO DI UN NUMERO: ES. $x \rightarrow$ opposto $-x$ perché $x + (-x) = 0$

INVERSO DI UN NUMERO: Se $x \neq 0$, l'inverso è $\frac{1}{x}$ perché $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

• <u>TEOREMA</u> (il primo esempio di teorema che vediamo)

$x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ ⇒ si può scrivere anche

• $\neg(\exists x \in \mathbb{Q} \quad x^2 = 2)$

oppure

$\forall x \in \mathbb{Q} \quad x^2 \neq 2$

oppure

$\forall x \quad x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2$

oppure

$\forall x \quad x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione:

• Sia $\frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$ ridotto ai minimi termini. Voglio dimostrare: $\left(\frac{k}{m}\right)^2 \neq 2$. Farò vedere che $\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 2$ è assurdo. Se $\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 2$, allora

$k^2 = 2m^2$. k^2 è pari ⇒ k è pari.

Allora $\exists h : k = 2h$.

Sostituendo: $(2h)^2 = 2m^2 \Rightarrow \cancel{4}^{2} h^2 = \cancel{2} m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2$ pari $\Rightarrow m$ è pari

↳ è assurdo che sia k che m siano pari perché avevamo supposto che $\frac{k}{m}$ fosse ridotta ai minimi termini.

• Dimostrazione alternativa:

Scompongo k e m in fattori primi:

$k = 2^a k_1$ con k_1 dispari,

$m = 2^b k_2$ con k_2 dispari. Allora:

$k^2 = 2^{2a} \cdot k_1^2$ e

$m^2 = 2^{2b} \cdot k_2^2$. Allora se per assurdo fosse $\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 2$, si avrebbe $k^2 = 2m^2 \Rightarrow 2^{2a} k_1^2 = 2 \cdot 2^{2b} k_2^2$,

• cioè $2^{2a} k_1^2 = 2^{2b+1} k_2^2$ dove k_1^2 e k_2^2 sono dispari.

Ma allora dovrebbe essere $2a = 2b+1$ perché la fattorizzazione è unica. Assurdo perché $2a$ è pari e $2b+1$ è dispari.

II LEZIONE 30/09/14

FUNZIONI

$f: A \to B$ A e B sono due insiemi

f è una funzione che ha come ~~C~~DOMINIO l'insieme A e come CODOMINIO l'insieme B. Una funzione è individuata da:

1. insieme DOMINIO
2. insieme CODOMINIO
3. "LEGGE" UNIVOCA che associa ad ogni elemento del dominio un unico elemento del codominio

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ x \xmapsto{f} x^2 \end{array}\right]$$ è un legge non una funzione

ES. ① Consideriamo la legge di sopra ("quadrato"). $\mathbb{R}^+$ = reali positivi

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una funzione biunivoca

ES ② Con la stessa legge "quadrato"

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non è biunivoca

f(x) si chiama immagine di x mediante la funzione f.

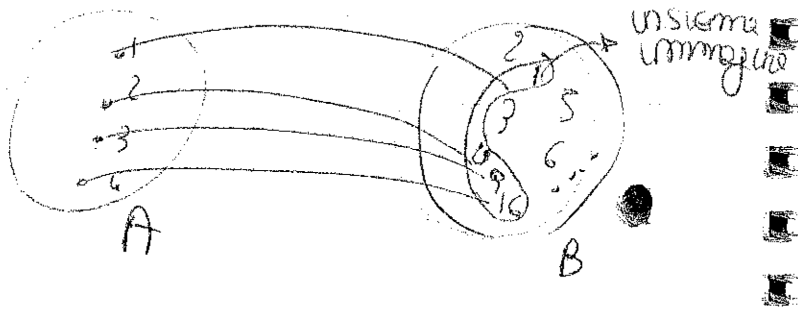
INSIEME IMMAGINE di $f: A \to B$ è l'insieme che contiene tutte le possibili immagini

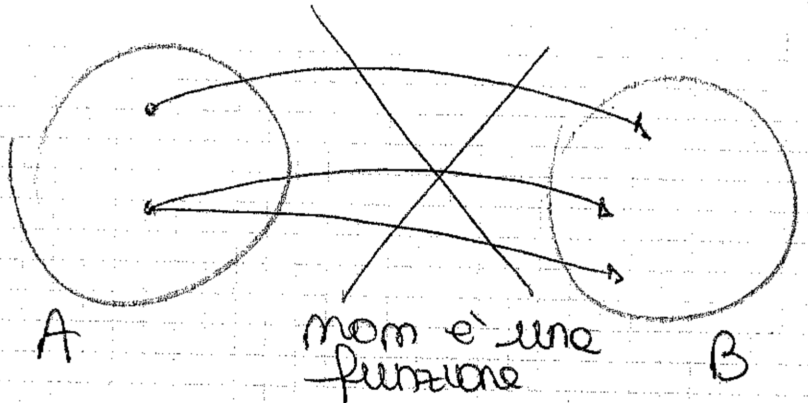
$$Im(f) = \{ b \in B \ / \ \exists a \in A \cdot f(a) = b \}$$

Esempio:

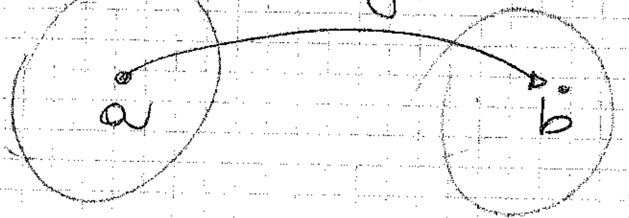
$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leq n \leq 25 \}$





Ogni elemento del dominio ha una e una sola immagine.
Si dice <u>CONTRO-IMMAGINE</u> di un elemento b del codominio un elemento a del codominio tale che $f(a) = b$, ovvero tale che l'immagine di a è b.



Possono capitare, dato un elemento $b \in B$, le seguenti tre situazioni:

1. b non ha contro-immagini;
2. b ha una sola contro-immagine;
3. b ha diverse contro-immagini (più di una).

ES.

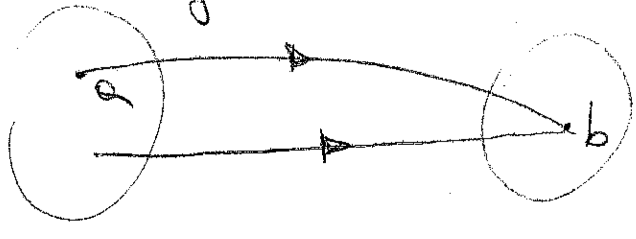
$f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}$ $\qquad n \mapsto n^2$

- 7 non ha contro-immagini
- 4 ha due contro-immagini: $\{-2, 2\}$
- 0 ha un'unica contro-immagine: $\{0\}$.

TIPI DI FUNZIONI

FUNZIONE INIETTIVA ⇒ una funzione si dice iniettiva $f: A \to B$ se:

① ogni elemento del codominio ha al più una contro-immagine



NON INIETTIVA

$\Updownarrow$

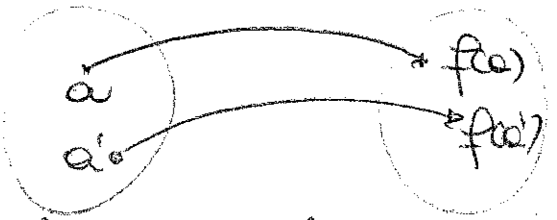
$\neg$ ($\forall b \in B$ $\exists$ al max 1 contro-immagine)

oppure, equivalentemente

$\exists b \in B$ che ha più di una contro-immagine

② Equivalentemente: elementi distinti hanno immagini distinte

$$\forall a, a' \in A \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$



si usa la contro-nominale:

③ Nella pratica $\forall a, a'$ $\underbrace{f(a) = f(a')}_{\text{ipotesi (Hp)}} \Rightarrow \underbrace{a = a'}_{\text{Tesi (Ts.)}}$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 3x - 7$ $\quad$ f è iniettiva

$\forall a, a'$ Hp: $f(a) = f(a')$, cioè $3a - 7 = 3a' - 7$

Ts: $a = a'$.

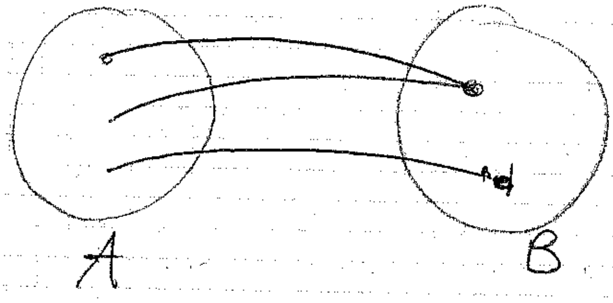
DIMOSTRAZIONE:

$3a - \cancel{7} = 3a' - \cancel{7} \Rightarrow \cancel{3}a = \cancel{3}a' \Rightarrow$

$\Rightarrow a = a'$

- <u>FUNZIONE SURIETTIVA</u> $\Rightarrow$ si dice che una funzione è suriettiva se:

① ogni elemento del codominio ha almeno una contro-immagine



ogni elemento di b è immagine di qualcuno.

In formule:

② ~~Equivalentemente~~: $\forall b \in B \quad \exists a \in A : f(a) = b$

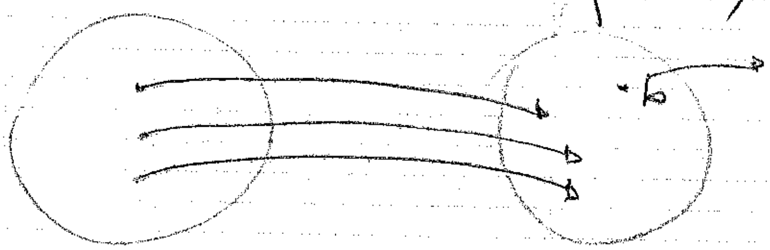
($\exists$: esiste almeno uno)

Formula per dire "non suriettiva":

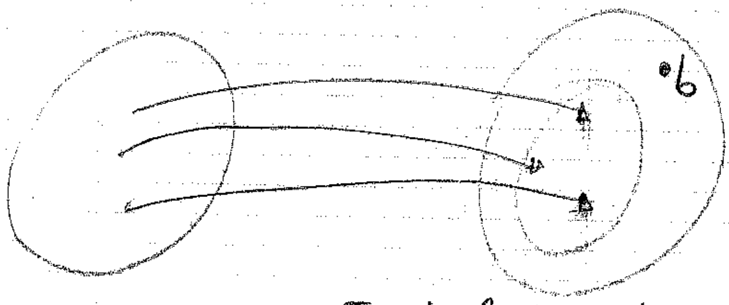
$$\neg(\forall b \in B \quad \exists a \in A : f(a) = b)$$

~~oppure~~ che equivale a

$$\exists b \in B \quad \forall a \in A : f(a) \neq b$$



non ha contro-immagine



non è suriettiva

Equivalentemente:

③ f è suriettiva se $\overline{Im(f)}$ = Codominio (insieme immagine)

ES ($\mathbb{R}_{\geq 0}$ sono i numeri reali ≥ 0)

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$f(x) = 2x^2$. f è suriettiva

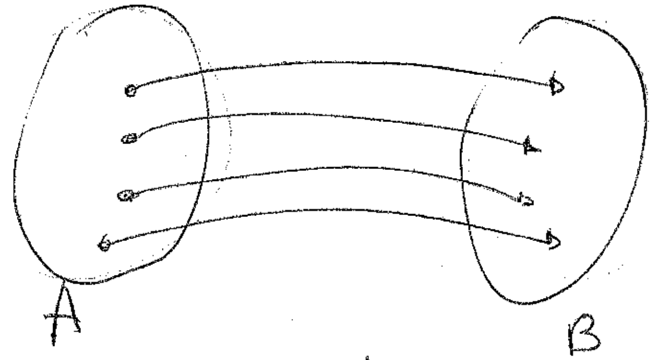
Hp: prendo un qualunque elemento $b \geq 0$

Ts: $\exists a \geq 0 : f(a) = 2a^2 = b \quad \Rightarrow a^2 = \frac{b}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{b}{2}}$ (esiste poiché $b \geq 0$)

$Im(f) = B$ l'insieme immagine coincide con il codominio

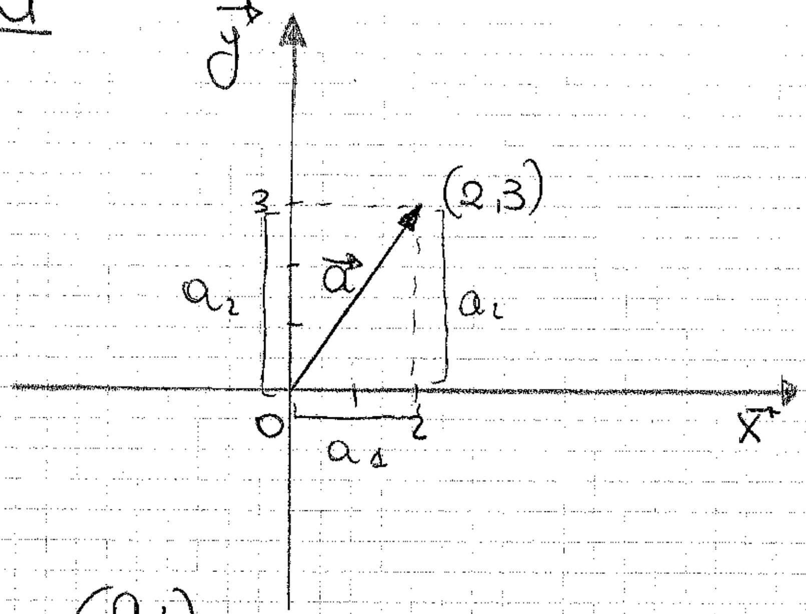
FUNZIONE BIUNIVOCA O BIGEZIONE: si dice che $f: A \to B$ è biunivoca o bigezione se f è sia iniettiva che suriettiva.

Ogni elemento del codominio ha esattamente
uno e uno solo
uno contro-immagine.



Esiste una funzione biunivoca tra due insiemi finiti se e solo se hanno lo stesso numero di elementi.

VETTORI



prodotto cartesiano

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} =$

$= \{(a;b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

coppia ordinata

ES.

$\{1,2\} = \{2,1\}$

ma $(1,2) \neq (2,1)$.

$(a,b) = (a';b')$

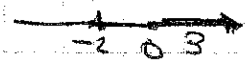
$\Updownarrow$

$a = a' \wedge b = b'$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dove a_1 e a_2 sono componenti del vettore

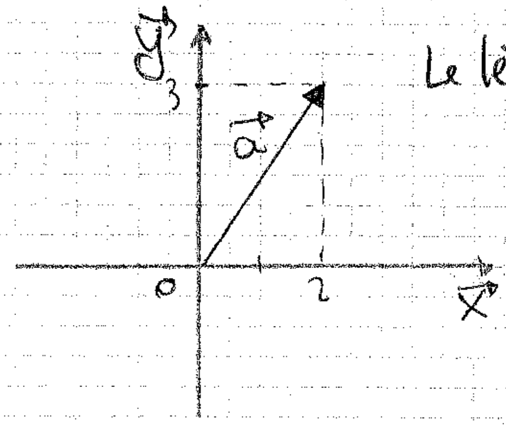
MODULO DEL VETTORE $|\vec{a}|$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (TEOREMA di PITAGORA)

In dimensione 1 $\longrightarrow$ vettore = numero



MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE: (uno scalare è cosa diversa da un vettore)

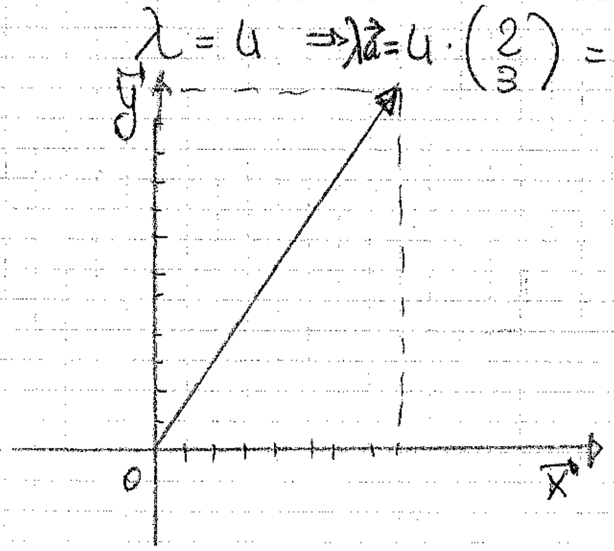
↳ numero



Le lettere λ, μ si usano di solito per denotare gli scalari.

ES. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e

$\lambda = 4 \Rightarrow \lambda\vec{a} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$



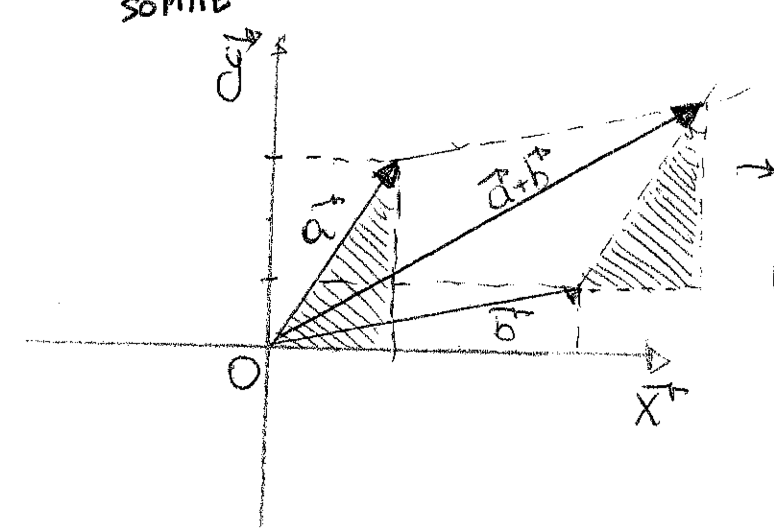
$\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$

SOMME TRA VETTORI:



→ regola del parallelogramma

<u>Esempio</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

In generale:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

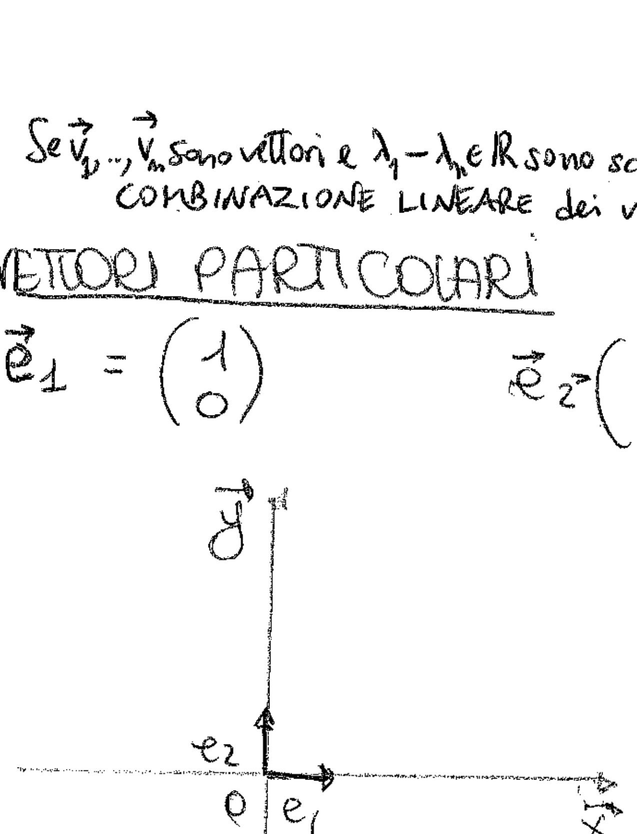
$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono vettori e $\lambda_1 - \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono scalari, una somma del tipo $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ si dice COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

VETTORI PARTICOLARI

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si chiamano VETTORI DELLA "BASE CANONICA" di $\mathbb{R}^2$



$\{e_1, e_2\}$ è un insieme di GENERATORI di $\mathbb{R}^2$. (facendo delle combinazioni lineari si può ottenere qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$)

$\mathbb{R}^2 \subseteq \{\lambda e_1 + \mu e_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ✳

$\supseteq$ ovvia

Ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare (UNICA) di $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$. Esempio:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prendendo $\lambda = -5$, $\mu = 8$ $\Rightarrow -5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

In generale: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

III^a LEZIONE 06/10/14

COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $\vec{a}$ e $\vec{b}$

È un vettore del tipo $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO:

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ DOMANDA: $\{v_1, v_2\}$ genera $\mathbb{R}^2$?

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Devo stabilire se è vero o no che $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \; \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c $\vec{a} = \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2}$

Esempio:

$$\heartsuit \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \overset{\vec{v_1}}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} + \mu \overset{\vec{v_2}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Posso trovare λ e μ in modo che valga $\heartsuit$?

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

SISTEMA
$$\begin{cases} 4 = 3\lambda + 2\mu \\ -2 = -\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 3\lambda + 2\lambda - 4 \\ \mu = \lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5} \\ \mu = \frac{8}{5} - 2 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ equivale a dire $\quad \forall a_1, a_2 \; \exists \lambda, \mu$ t.c $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu = a_1 \\ -\lambda + \mu = a_2 \end{cases}$

cioè $\forall a_1, a_2$ il sistema ha soluzione λ e μ?

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$? NO!!

Esempio.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

$\forall \lambda, \mu \quad \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$\begin{cases} \lambda - 3\mu = 1 \\ -2\lambda + 6\mu = 0 \end{cases}$ NON HA SOLUZIONI

$\Downarrow$

$\begin{cases} \lambda = 3\mu + 1 \\ \cancel{-6\mu} - 2 + \cancel{6\mu} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \\ -2 = 0 \end{cases}$

TEOREMA: Le seguenti sono proprietà equivalenti:

① I vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$

② $\forall \alpha, \beta$ il sistema $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ ha soluzioni

③ $ad - bc \neq 0$ (Anticipo: "determinante" $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$)

④ I vettori $\vec{w}$ e $\vec{v}$ non sono (paralleli) cioè non sono l'uno multiplo dell'altro

① $\underset{\text{equivale}}{\iff}$ ②

$\vec{v}$ e $\vec{w}$ generano $\mathbb{R}^2$ significa:

$\forall \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda \cdot \vec{v} + \mu \vec{w} = \vec{a}$

Scrivo componente per componente.

$\forall \alpha, \beta \begin{cases} \lambda a + \mu b = \alpha \\ \lambda c + \mu d = \beta \end{cases}$ ha soluzioni. (Se scrivo x e y al posto di λ e μ ottengo ②)

3 $\Longleftrightarrow$ 4
equivale

3 $\Longrightarrow$ 4

Hp: $ad - bc \neq 0$
Tesi: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ non sono uno multiplo dell'altro

CONTRONOMINALE:
Hp: $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono uno multiplo dell'altro
Tesi: $ad - bc = 0$
Per ipotesi $\exists \lambda : \lambda \vec{v} = \vec{w}$
(o $\exists \lambda : \lambda \cdot \vec{w} = \vec{v}$ ma la dimostrazione non cambia)
$\exists \lambda : \lambda \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda a = b \\ \lambda c = d \end{cases}$$

Moltiplico per c:
$\lambda a = b \Rightarrow \lambda ac = bc$
Moltiplico per a:
$\lambda c = d \Rightarrow \lambda ac = ad$
$\Downarrow$
$bc = ad$ c.v.d

4 $\Longrightarrow$ 3

Hp: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\vec{w}$ $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ non sono multipli uno dell'altro.
Tesi: $ad - bc \neq 0$

CONTRONOMINALE:
Hp: $ad - bc = 0$
Tesi: $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono uno multiplo dell'altro

Per ipotesi: $ad - bc = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ad = bc \Rightarrow$
(supponendo $a \neq 0$) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \lambda$

Moltiplicando per λ:

$$\begin{cases} a\lambda = \frac{b}{\cancel{a}} \cancel{a} = b \\ c\lambda = \frac{d}{\cancel{c}} \cancel{c} = d \end{cases}$$

(i vettori sono paralleli)

Dunque $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, cioe'
$\lambda \cdot \vec{v} = \vec{w}$ e quindi $\vec{w}$ e' multiplo di $\vec{v}$

Resta da controllare il caso in cui $a = 0$.
(per esercizio)

METODO DI CRAMER

$$\begin{cases} aX + bY = \alpha \\ cX + dY = \beta \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$X = \frac{\alpha d - b\beta}{ad - bc} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{a condizione} \\ \text{che } ad - bc \neq 0\end{array}\right)$$

$$Y = \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc}$$

③ $\Longrightarrow$ ② Verifica che questi numeri X e Y sono effettivamente soluzioni:

$$a \cdot \frac{\alpha d - b\beta}{ad - bc} + b\, \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc} = \frac{a\alpha d - \cancel{ab\beta} + \cancel{ab\beta} - \alpha bc}{ad - bc} =$$

$$= \frac{\alpha \cancel{(ad - bc)}}{\cancel{ad - bc}} = \alpha$$

$$c\, \frac{\alpha d - b\beta}{ad - bc} + d\, \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc} = \frac{\cancel{c\alpha d} - cb\beta + ad\beta - \cancel{\alpha dc}}{ad - bc} =$$

$$= \frac{\beta \cancel{(ad - bc)}}{\cancel{ad - bc}} = \beta$$

② $\Longrightarrow$ ③

CONTRONOMINALE:

Hp: $ad - bc = 0$, cioè $ad = bc$

Tesi: $\exists \alpha, \beta : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ è impossibile

DIMOSTRAZIONE: Vedi prossime lezione.

~~IV° LEZIONE 07/10/14~~

$$(*)\begin{cases} aX + bY = \alpha \\ cX + dY = \beta \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow (3)$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$ad - bc = 0 \Rightarrow$ esistono α, β t.c. il sistema $(*)$ non ha soluzioni

(1) Se $a=0$

$ad - bc = 0 \Rightarrow bc = 0 \Rightarrow b=0$ o $c=0$

Sottocasi

(1_I) $a=0$ e $b=0$ $\quad (*)\begin{cases} 0=\alpha \\ cX + dY = \beta \end{cases}$

Ad esempio se prendo $\alpha = 1$, il sistema è impossibile

(1_{II}) $a=0$ e $c=0$ $(b \neq 0)$ $\quad (*)\begin{cases} bY = \alpha \\ dY = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \frac{\alpha}{b} \\ d\frac{\alpha}{b} \neq \beta \end{cases}$

Se prendo un opportuno β

(2) $a \neq 0$

$$\begin{cases} aX + bY = \alpha & \text{moltiplico per } c \\ cX + dY = \beta & \text{moltiplico per } a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} acX + cbY = c\alpha \\ acX + adY = a\beta \end{cases} \quad II^a - I^a$$

$= (ad - cb)Y = a\beta - c\alpha$. Se prendo $\beta = 1$, $\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = a$. Assurdo

"REGOLA" DI CRAMER

$$X = \frac{\det\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \beta & d\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}} = \frac{\alpha d - b\beta}{ad - bc}$$

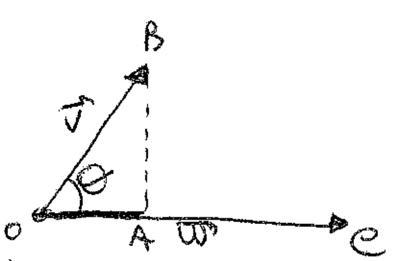
$$Y = \frac{\det\begin{pmatrix}a & \alpha\\ c & \beta\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}} = \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc}$$

$\boxed{NB}$ Considero il sistema come una combinazione lineare di vettori:

$$X\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

(diverso dalla moltiplicazione per scalare data dal prodotto di un vettore per un numero)



$\vec{v} \cdot \vec{w}$

Prendo V la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

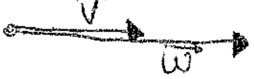
$\overline{OA}$ = proiezione di $\overline{OB}$ su $\overline{OC}$ = $\overline{OB}\cos\theta$

$b = a\cos\theta$

Definizione: Il prodotto scalare:

$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w}}$ = prodotto tra la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ e il modulo di $\vec{w}$ (lunghezza)

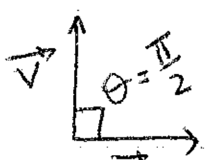
Esempio:



Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno stessa direzione e stesso verso allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. In generale:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \boxed{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\theta}$$ (la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ è $|\vec{v}|\cos\theta$)

Esempio:



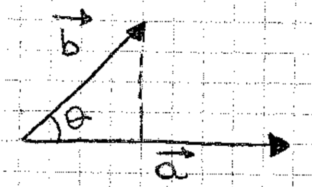
$\vec{v} \perp \vec{w}$ se e solo se il prodotto scalare è 0.

• Come si calcolano i prodotti scalari con le coordinate?

$\vec{a} \cdot \vec{b}$. Per rispondere, vediamo prima alcune proprietà.

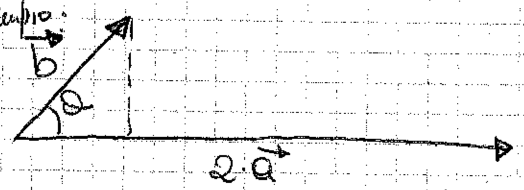
PROPRIETÀ:

(1) $\forall \lambda \; \boxed{(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})}$ (è vera anche se $\lambda < 0$)



$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

Esempio:



$|2\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta =$
$= 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$

In generale notiamo che:

$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

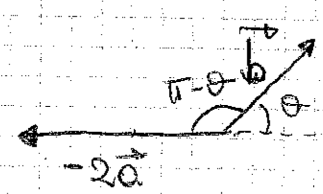
$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2)} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda| |\vec{a}|$

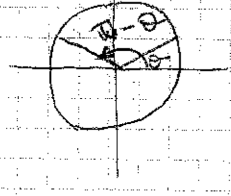
(Ricordare che $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$ è uguale al valore assoluto di λ)

λ negativo



PROIEZIONE: $|\vec{b}| \cdot \cos(\pi - \theta) = -|\vec{b}| \cos\theta$

poiché



$|-2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

$(-2\vec{a}) \cdot \vec{b} = -2 |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = -2(\vec{a} \cdot \vec{b})$

ATTENZIONE: Ci sono tre tipi di prodotto diversi nella proprietà (1):

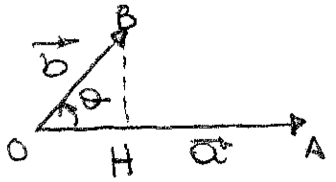
- PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI
- PRODOTTO TRA NUMERI REALI
- PRODOTTO TRA UNO SCALARE E UN VETTORE

② $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$

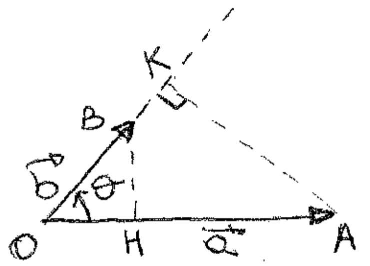
NB

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos\theta$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{OH} \cdot \overline{OA} = \overline{OB}\ \overline{OA} \cos\theta$

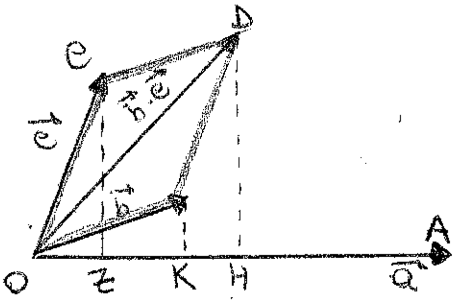


sono uguali

$\vec{b} \cdot \vec{a} = \overline{OK} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos\theta$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ = proiezione di $\vec{b}+\vec{c}$ su $\vec{a}$ moltiplicato per $|\vec{a}|$ =
$= \overline{OH} \cdot \overline{OA}$



$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = proiezione di $\vec{b}$ su $\vec{a}$ moltiplicato per $|\vec{a}|$ =
$= \overline{OK} \cdot \overline{OA}$

$\vec{a} \cdot \vec{c}$ = proiezione di $\vec{c}$ su $\vec{a}$ moltiplicato per $|\vec{a}|$ =
$= \overline{OZ} \cdot \overline{OA}$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \overline{OH} \cdot \overline{OA}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \overline{OK} \cdot \overline{OA} + \overline{OZ} \cdot \overline{OA} = (\overline{OK} + \overline{OZ}) \cdot \overline{OA}$

$\Rightarrow$ Sono uguali perché $\overline{OH} = \overline{OK} + \overline{OZ}$
(per la regola del parallelogramma:
proiezione somma = somma delle singole proiezioni)

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}}$$

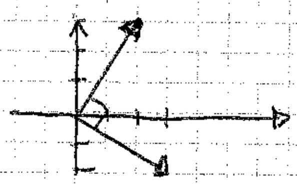
TEOREMA

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ES.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

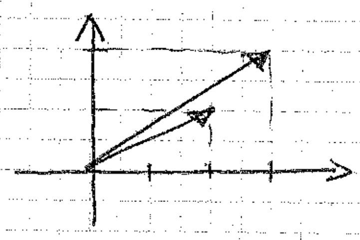


$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Qual è l'angolo formato dai vettori: $\vec{a}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{b}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$\Downarrow$

$$\theta = \arccos \frac{8}{\sqrt{65}}$$

N.B. $\frac{8}{\sqrt{65}}$ è molto "vicino" ad 1
(infatti $8 = \sqrt{64}$), quindi θ è "vicino" a 0

V LEZIONE 09/10/14

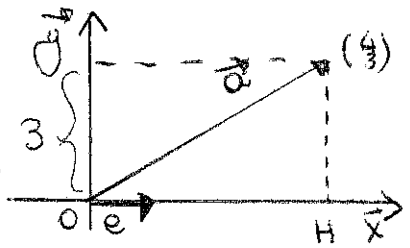
Dimostriamo il TEOREMA enunciato la lezione scorsa.

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Vogliamo calcolare $\vec{a} \cdot \vec{e}_1$



Esempio:

Vettore $\vec{v}$ unitario significa $|\vec{v}| = 1$ ($\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ sono vettori unitari)

$\overline{OH}$ = proiezione di $\vec{a}$ lungo la direzione e_1, cioè la proiezione di $\vec{a}$ sull'asse $\vec{x}$.

$\overline{OH} = a_1$. Allora:

$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = \overline{OH} \cdot |\vec{e}_1| = a_1 \cdot 1 = a_1$

In modo analogo, $\vec{a} \cdot \vec{e}_2 = a_2$.

Conclusione: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

(2 pagine prima)

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \vec{a} \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) = (\text{formula } 3)$$
$$= \vec{a} \cdot (b_1 \vec{e}_1) + \vec{a} \cdot (b_2 \vec{e}_2) = (\text{formula } 2)$$
$$= (b_1 \vec{e}_1) \cdot \vec{a} + (b_2 \vec{e}_2) \vec{a} = (\text{formula } 1)$$
$$= b_1 (\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{a}}_{a_1}) + b_2 (\underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{a}}_{a_2}) = \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

ESEMPIO

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono $\perp$ perché $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2(-6) + 3(4) = 0$

ESERCITAZIONE

- $$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

METODO DI ELIMINAZIONE (GAUSS)

$\boxed{\text{NB}}$

Espressione lineare = espressione con variabili di 1° grado, mai moltiplicate tra di loro.

Sottrarre $\lambda \cdot$ (I^a equazione) dalla II^a equazione in modo da "ELIMINARE" la variabile x.

Moltiplico per $\frac{3}{2}$ la prima equazione:

$$\begin{cases} 3x + \frac{9}{2}y = \frac{27}{2} \\ 3x - y \quad = 8 \end{cases}$$

II riga − I riga

$$// \quad -\frac{11}{2}y = -\frac{11}{2}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 0 = \frac{11}{2}y - \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 9 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

da cui $y = 1$

Dunque: $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$ ha soluzione $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

- Si scrive in questo modo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

dove $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ è la "MATRICE" dei coefficienti, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, e $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ è il vettore dei termini noti.

Cosa significa?

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Facciamo un esempio con un sistema lineare 3×3, cioè con 3 equazioni e 3 incognite.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 5y - z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = 14 \end{cases}$$

(eliminazione)

Operazione E_1: II^a riga $- 2(I^a$ riga$)$

Operazione E_2: III^a riga $- 3(I^a$ riga$)$

In questo modo "eliminiamo" la x dalle II e III equazione

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 0 + y - 7z = -2 \\ 0 + 2y - 4z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ \boxed{\begin{matrix} y - 7z = -2 \\ 2y - 4z = 5 \end{matrix}} \end{cases}$$

Ci concentriamo ora sulle ultime due righe ed eliminiamo la y.

Operazione E_3: III^a riga $- 2(II^a$ riga$)$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y - 7z = -2 \\ 0 + 10z = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - 3 \\ y = \frac{43}{10} \\ z = \frac{9}{10} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = - \frac{83}{10} \\ y = \frac{43}{10} \\ z = \frac{9}{10} \end{cases}$$

Prendiamo un esempio più semplice:
(è cambiata solo la I equazione, ma le soluzioni saranno numeri interi)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 5y - z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = 14 \end{cases} \xrightarrow[\text{III riga} - 3 \cdot \text{I riga}]{\text{II riga} - 2 \cdot \text{I riga}} \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 0 + y - 5z = -2 \\ 0 + 2y - z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \text{III riga} - 2 \cdot \text{II riga}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y - 5z = 2 \\ 0 + 9z = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. In termini di vettori, abbiamo che:

$$-5 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{colonna coefficienti di x}} + 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\text{coeff. di y}} + 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{coeff. di z}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

. Si scrive anche:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

dove A è la matrice dei ~~coeff~~ coefficienti, $\vec{x}$ è il vettore delle incognite, e $\vec{b}$ il vettore dei termini noti

PER RIGHE: (si usano prodotti scalari)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 5 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 8 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} = 1(-5)+2\cdot3+2\cdot1 = 3$$

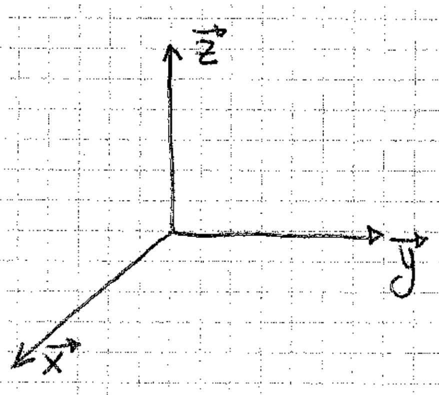
$$\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} = 2(-5)+5\cdot3+(-1)(-1) = 4$$

$$\begin{pmatrix}3 & 8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} = -15+24+5 = 14 \;\; (*)$$

PER COLONNE: (si usano combinazioni lineari)

$$-5\,COL\,1 + 3\,COL\,2 + 1\,COL\,3 = -5\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\14\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$.



Valgono le stesse formule viste per $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$\boxed{NB}$ Sistema lineare 3×3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3\end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$ matrice dei coefficienti

Questo sistema ha soluzione se e solo se il vettore $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ dei termini noti è combinazione lineare delle tre colonne (o meglio, dei tre vettori colonna)

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{23}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{pmatrix}$$

(*) Per RIGHE $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Riga } 1 \cdot \vec{x} \\ \text{Riga } 2 \cdot \vec{x} \\ \text{Riga } 3 \cdot \vec{x} \end{pmatrix}$ → sono prodotti scalari

$A \cdot B$ A e B matrici 3x3

PRODOTTO TRA MATRICI

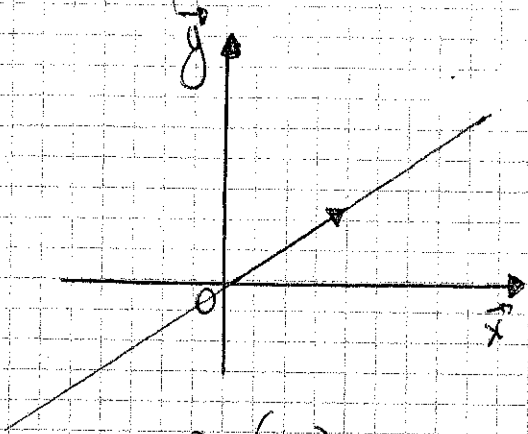
$$\underbrace{A}_{\substack{\text{matrici} \\ 3\times3}} \cdot \underbrace{\vec{x}}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{di } \mathbb{R}^3}} = \underbrace{\vec{b}}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{di } \mathbb{R}^3}}$$

$$A \cdot \left(\underset{\substack{\text{colonna} \\ 1}}{\vec{b_1}} \,\middle|\, \underset{\substack{\text{colonna} \\ 2}}{\vec{b_2}} \,\middle|\, \underset{\substack{\text{colonna} \\ 3}}{\vec{b_3}} \right) \ \underline{\text{def}} \ \left(A \cdot \vec{b_1} \,\middle\vdots\, A \cdot \vec{b_2} \,\middle\vdots\, A\vec{b_3} \right)$$

VI^a LEZIONE 13/10/14

RETTE PER L'ORIGINE

In $\mathbb{R}^2$: Tutti i vettori multipli di un fissato vettore $\vec{v}$.



$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ → vettore fissato

DIREZIONE

Retta $r = \{ \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Retta di direzione $\vec{v}$.

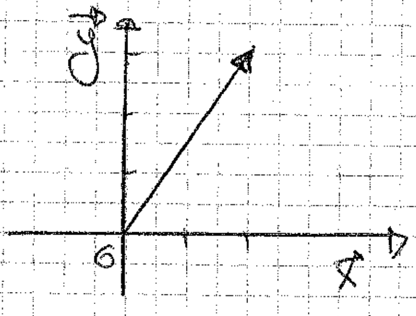
$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiene alla retta $r \iff$ esiste λ t.c. $\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

cioè $\begin{cases} x = \lambda v_1 \\ y = \lambda v_2 \end{cases}$

ESEMPIO

Retta che ha la direzione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



$\begin{cases} x = \lambda \cdot 2 \\ y = \lambda \cdot 3 \end{cases}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

Esempi:

se $\lambda = 0 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

se $\lambda = 1 \Rightarrow P \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

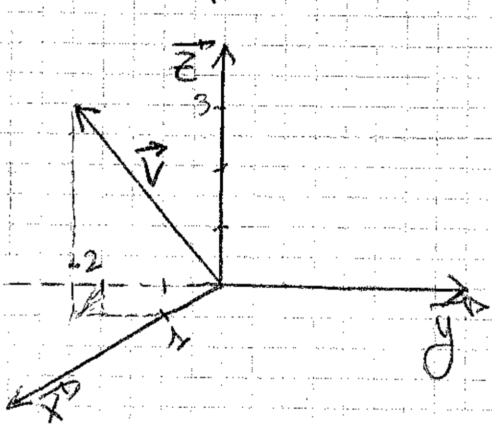
se $\lambda = -2 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA

$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \xrightarrow[\text{moltiplic per 2}]{\text{moltiplic per 3}} \begin{cases} 3x = 6\lambda \\ 2y = 6\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 2y \iff 3x - 2y = 0$

In $\mathbb{R}^3$, cerco l'equazione della retta di direzione $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$r = \{ \lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

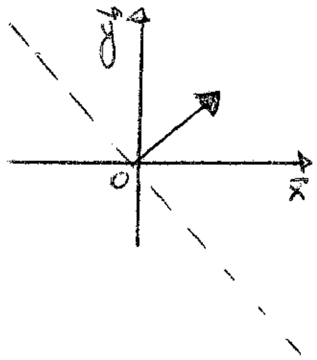


$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ $\boxed{1 \text{ parametro } \lambda}$

In $\mathbb{R}^2$ ci sono 2 modi possibili per individuare una retta:

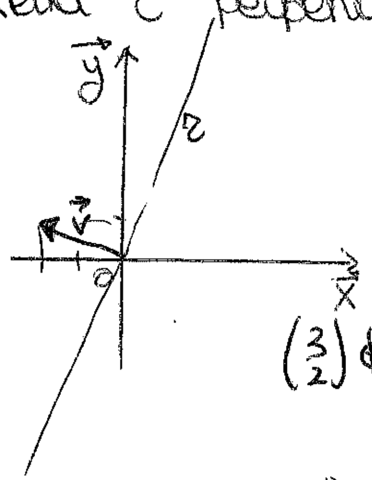
MODO I Retta come insieme dei vettori multipli di un vettore fissato.

MODO II Retta come insieme dei vettori perpendicolari ad un vettore fissato.



ESEMPIO

Retta r perpendicolare a $\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$



$$r = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{w} \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Esempio

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \notin r$ perche' $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = -6+2 = -4 \neq 0$ i due vettori non sono perpendicolari.

Il punto $P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartiene alla retta r se e solo se

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 0 \iff -2x+y=0$$

In $\mathbb{R}^3$. Consideriamo i tre vettori "speciali" della BASE CANONICA.

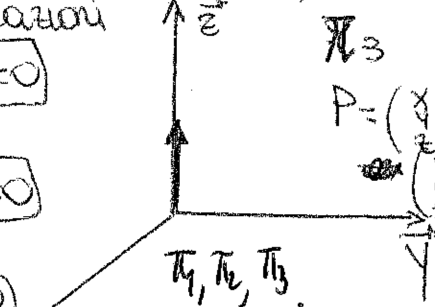
$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

equazioni

$$\pi_1 = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} \cdot \vec{e_1} = 0 \right\} \rightsquigarrow \boxed{x=0}$$

$$\pi_2 = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} \cdot \vec{e_2} = 0 \right\} \rightsquigarrow \boxed{y=0}$$

$$\pi_3 = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} \cdot \vec{e_3} = 0 \right\} \rightsquigarrow \boxed{z=0}$$



π_1, π_2, π_3 SONO PIANI

π_3

$P = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \pi_3 \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \iff$

$\boxed{z=0}$ piano che contiene gli assi x e y.

ESERCIZIO

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ piano π dei vettori $\perp$ a $\vec{v}$.

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0$

L'intersezione di 3 piani in $\mathbb{R}^3$ corrisponde a un <u>sistema lineare 3X3.</u>

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = \alpha \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = \beta \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = \gamma \end{cases}$$

① Questo sistema ha soluzione per ogni α, β, γ.

$\Leftrightarrow$

② (Interpretazione geometrica) i tre piani si intersecano sempre in un punto.

$\Leftrightarrow$

③ $\exists!\, x_1, x_2, x_3$

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \quad X_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} + X_3 \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

cioè i 3 vettori colonna generano $\mathbb{R}^3$

① $\Leftrightarrow$ ② $\Leftrightarrow$ ③ sono proprietà equivalenti.

$\boxed{NB}$ $\exists!$ significa "esiste ed unico"

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ oppure } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Prodotto matrice per vettore: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

<u>per colonne</u>: $X_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} + X_3 \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

<u>per righe</u>: (usando prodotti scalari)

$b_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

$b_1 = (1^a \text{ riga}) \cdot \vec{x}, \; b_2 = (2^a \text{ riga}) \cdot \vec{x}, \; b_3 = (3^a \text{ riga}) \cdot \vec{x}$

$b_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3).$

In formule

Dunque $b_1 = a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} \cdot x_3$ etc.

MATRICE IDENTITÀ "I"

In generale una funzione $f: X \longrightarrow X$ si dice identità se $f(x) = x$ per ogni $x \in X$

Notiamo che una matrice A di dimensioni 3×3 determina una funzione $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, precisamente $\vec{x} \xmapsto{f_A} A \cdot \vec{x}$, cioè:

$f_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

Matrice identità I è la matrice la cui funzione corrispondente f_A è la funzione identità.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ecco una matrice A t.c. $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ per ogni $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

Proviamo cominciando da $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ ed $\vec{e_3}$ (i tre vettori della base canonica $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Infatti:

per colonne $\Rightarrow$ $1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

Voglio che $A \cdot \vec{e_1} = 1^a$ colonna $= \vec{e_1}$. Dunque devo avere che $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Adesso considero $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{e_2} = 0 \cdot \cancel{1^a \text{ colonna}} + 1 \cdot 2^a \text{ colonna} + 0 \cdot 3^a \cancel{\text{colonna}} =$

$= 2^a \text{ colonna} = \vec{e}_2$, cioè $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analogamente con $\vec{e_3}$ ricavo che la 3^a colonna $= \vec{e}_3$.

Resta da verificare che non solo con $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ma per ogni $\vec{x}$, vale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dalla definizione per colonne:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{Sì!}$$

- Notazione:

$A = (a_{ij})$

$I = (a_{ij})$ dove $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
$\qquad\qquad\qquad\quad a_{ij} = 1$ se $i = j$

PRODOTTO TRA MATRICI

Prendiamo A e B matrici 3X3.

$A \cdot B = A \cdot [\vec{b_1} | \vec{b_2} | \vec{b_3}]$ la matrice B ha come colonne i tre vettori $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

$A \cdot B \underset{\text{Def}}{=} [A\vec{b_1} | A\vec{b_2} | A\vec{b_3}]$ A·B è la matrice le cui 3 colonne sono i vettori $A\vec{b_1}, A\vec{b_2}, A\vec{b_3}$

ESEMPIO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1^a & 2^a & 3^a \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}}_{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 11 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A\vec{b_1} \;\; A\vec{b_2} \;\; A\vec{b_3}$

Calcoliamo la I colonna di A·B, cioè $A \cdot \vec{b}_1$ che sarà $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=(-2)\cdot 1+1\cdot 0+1(-2)=-4$$

la prima coordinata e' il prodotto scalare

$$\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=0\cdot 1+3\cdot 0+2\cdot(-2)=-4$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=0\cdot 1+0\cdot 0+(-1)(-2)=2$$

Dunque $\begin{pmatrix}-4\\-4\\2\end{pmatrix}$ e' la prima colonna di $A\cdot B$, etc, etc...

proprietà ha questo prodotto?

Formula $A\cdot B=C$ $\quad c_{ij}=(\text{Riga } i \text{ di } A)(\text{colonna } j \text{ di } B)=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$

$= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$.

Dunque

c_{ij} = prodotto scalare tra la i^a riga di A e la j^a colonna di B.

Questo prodotto non e' commutativo, cioe' in generale $A\cdot B\neq B\cdot A$. Ricordiamo che tra funzioni la composizione non e' commutativa:

$f\circ g\neq g\circ f$ (e vedremo che prodotto tra matrici corrisponde a composizione delle funzioni corrispondenti)

ESEMPIO

se $f(x)=x^2$

e se $g(x)=x+1$

$f\circ g(x)=(x+1)^2$ e' diversa da

$g\circ f(x)=x^2+1$

Per ogni matrice A, $A\cdot I=I\cdot A=A$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[\overset{\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\end{pmatrix}}{A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}\middle|\overset{\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\end{pmatrix}}{A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}\middle|\overset{\begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right]=A$$

Si verifica inoltre che: $I\cdot A=A$