

(Numero di matricola)

$$\frac{z}{5} = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = -1 - i\sqrt{3}, \quad \frac{z}{7} = 2(\cos \frac{5}{2}\pi + i \sin \frac{5}{2}\pi) = 1 - i\sqrt{2}$$

Esercizio 2. [10 pt.]

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

• $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}.$

• $W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$

1. Trovare una base di V .
2. Trovare una base di W .
3. Descrivere W in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema di equazioni lineari omogenee.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^3$.

1) $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad x_1 + 3 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad x_1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B_V = \{v_1, v_2\}$ è una base di V

2) Riduciamo la matrice le cui colonne sono i vettori che generano W :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + 3\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \frac{1}{3}\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P L P

I vettori $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ corrispondenti alle colonne pivot formano una base $B_W = \{w_1, w_2\}$ di W .

3) Cerchiamo i vettori $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ per i quali esistono x_1 e x_2 tali che $x_1 \cdot \vec{w}_1 + x_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{b}$, cioè per i quali il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 - 3x_2 = b_2 \\ -2x_1 + 3x_2 = b_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & b_1 \\ 3 & -3 & b_2 \\ -2 & 3 & b_3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} + 3\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & b_2 + 3b_1 \\ 0 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{scambio}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 3 & b_2 + 3b_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + 3\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 + 3b_3 - 6b_1 \end{array} \right)$$

Il sistema è risolubile $\Leftrightarrow b_2 + 3b_1 + 3b_3 - 6b_1 = 0 \Leftrightarrow$
 ~~$3b_1 - b_2 - 3b_3 = 0$~~ $3b_1 - b_2 - 3b_3 = 0$

Quindi $W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \mid 3b_1 - b_2 - 3b_3 = 0 \right\}$, cioè

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$$

4) $V \cap W$ è l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che sono soluzioni

del sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$, ovvero

$V \cap W$ è il nucleo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-3I} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

P P L

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 1 = 0 & \Rightarrow x_1 = -3x_2 + 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3 = 0 & \Rightarrow 3(-3x_2 + 1) - x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$-9x_2 + 3 - x_2 - 3 = 0$$

$x_2 = 0$

$$x_1 = 1$$

$$3 - 0 - 3 = 0$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B_{V \cap W} = \{\vec{u}\}$ è una base di $V \cap W$

5) Per la formula di Grassman

$$\begin{aligned} \dim(V+W) &= \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = \\ &= 2 + 2 - 1 = 3, \end{aligned}$$

quindi necessariamente $V+W = \mathbb{R}^3$

Esercizio 3. [11 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -18 & 0 & -9 \\ 3 & 8 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

$$\begin{aligned} 1) \quad P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -18 & 0 & -9 \\ 3 & 8-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\text{sviluppo lungo l'ultima riga}) = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -18 & 0 \\ 3 & 8-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\text{sviluppo lungo la III colonna}) \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -18 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2 \cdot [(-7-\lambda)(8-\lambda) + 54] \\ &= (\lambda-2)^2 (-56 + 7\lambda - 8\lambda + \lambda^2 + 54) = (\lambda-2)^2 (\lambda^2 - \lambda - 2) = \\ &= (\lambda-2)^2 (\lambda-2)(\lambda+1) = (\lambda-2)^3 (\lambda+1) \end{aligned}$$

$\lambda = 2$. autovalore di molt. algebrica 3

$\lambda = -1$ autovalore di molt. algebrica 1

$$2) \quad \lambda=2 \quad \text{Aut}_A(2) = \ker(A-2I)$$

$$A-2I = \begin{pmatrix} -9 & -18 & 0 & -9 \\ 3 & -6 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ -9 & -18 & 0 & -9 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} + 3\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_2=1 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \Rightarrow \\ 3x_1 + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2=0 \\ x_3=1 \\ x_4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 0 + 0 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 0 + 3 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases} \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B_{\lambda=2} = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3 \}$ è una base dell'autospazio di autovettore $\lambda=2$

$$\lambda=-1 \quad \text{Aut}_A(-1) = \ker(A+I)$$

$$A+I = \begin{pmatrix} -6 & -18 & 0 & -9 \\ 3 & 9 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 3 \\ -6 & -18 & 0 & -9 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{II} + 2\text{I} \\ \text{IV} - \text{I} \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} + \text{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

P P L P

variabile libera

$$\underline{x_3 = 1}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_4 = 0 \quad -3x_2 + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \quad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + 9 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$B_{\lambda=-1} = \{ \vec{s}_4 \} \text{ e' una base dell'autospazio di autovettore } \lambda = -1$$

3) La matrice e' diagonalizzabile perche'

$\{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4 \}$ e' una base di autovettori.

La matrice "cambio di base" e'

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e si ha}$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{diagonale.}$$

Esercizio 4. [6pt.]

Determinare tutte le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfano le seguenti proprietà, scrivendone le matrici associate A rispetto alla base canonica:

1. $f(1, 0, 0)$ è un vettore non nullo che appartiene sia al piano $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ sia al piano $x_1 = 0$.
2. $(0, 1, 0)$ è un autovettore di f di autovalore $\lambda = 2$.
3. f non è iniettiva.

Determinare inoltre quali delle applicazioni lineari che soddisfano le proprietà di sopra hanno entrambe le seguenti proprietà:

- Gli unici autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$.
- La matrice associata A è diagonalizzabile.

$$1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = x_3$$

$$\text{Quindi } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \text{ dove } a \neq 0$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{Le matrici associate rispetto alla base canonica e'}$$

$$A = \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mid f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \mid f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 2 & c \\ a & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$f \text{ non e' iniettiva} \Leftrightarrow \det A = 0$$

Sviluppo lungo la
prima riga:

$$\det(A) = b \cdot \det \begin{pmatrix} a & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix} = b \cdot (-2a)$$

Quindi $\det A = -2ab$ dove $a \neq 0$ e perciò

$$\det A = 0 \iff b = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & c \\ a & 0 & d \end{pmatrix}$$

Al vedere di $a \neq 0$ e di c, d ,
queste sono tutte e sole le matrici
con le proprietà 1, 2, 3.

• Gli unici autovalori sono $\lambda = 0, \lambda = 2$.

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ a & 2-\lambda & c \\ a & 0 & d-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & c \\ 0 & d-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda(2-\lambda)(d-\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-d)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = d$

Per avere la condizione richiesta, e' quindi necessario
(e sufficiente) che $d = 0$ o $d = 2$

Vediamo i due casi.

$$\underline{d=0} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ aut. di
mult. algebrica 2

$\lambda = 2$ aut. di
mult. algebrica 1

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ l'autospazio di autovalore $\lambda=0$ ha dimensione 2

$$A - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e III}} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P P L

Visto che $a \neq 0$ si hanno 2 pivot e 1 variabile libera, quindi

$\text{Aut}_A(0)$ ha dimensione 1

ed in questo caso A non è diagonalizzabile.

$d=2$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & c \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda=0$ aut. di m.a. 1

$\lambda=2$ aut. di m.e. 2

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ l'autospazio di autovalore $d=2$ ha dimensione 2

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{II} + \frac{a}{2}I \\ \text{III} + \frac{a}{2}I \end{matrix}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $c \neq 0$ la matrice ha un'unica variabile libera,

quindi $\text{Aut}_A(2)$ ha dimensione 1 e A non è diagonalizzabile.

Se $c=0$ la matrice ha 2 variabili libere,

quindi $\text{Aut}_A(2)$ ha dimensione 2 e A è diagonalizzabile.

Conclusione:

Le metriche che hanno tutte le proprietà richieste sono tutte e sole le metriche

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dove } a \neq 0$$