Ingegneria Edile-Architettura – Design Industriale

Compito di Geometria

14 Luglio 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]

Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$(\overline{z})^4 - 4z^2 = 0.$$

Esercizio 2. [10 pt.]

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$.
- $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Trovare una base di V.
2. Trovare una base di W.
3. Descrivere W in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema di equazioni lineari omogenee.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. [11 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -18 & 0 & -9 \\ 3 & 8 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. [6pt.]

Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le seguenti proprietà, scrivendone le matrici associate A rispetto alla base canonica:

1. $f(1,0,0)$ è un vettore non nullo che appartiene sia al piano $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ sia al piano $x_1 = 0$.
2. $(0,1,0)$ è un autovettore di f di autovalore $\lambda = 2$.
3. f non è iniettiva.

Determinare inoltre quali delle applicazioni lineari che soddisfano le proprietà di sopra hanno entrambe le seguenti proprietà:

- Gli unici autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$.
- La matrice associata A è diagonalizzabile.