Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

10 Febbraio 2025

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non sono ~~sono~~ funzioni iniettive, allora $f \circ g$ non è iniettiva.	☒	☐
2) L'equazione complessa $z^2 + z + 1 = 0$ non ha soluzioni complesse.	☐	☒
3) Se una matrice quadrata ha tutti gli autovalori reali e diversi da 0 allora è invertibile.	☒	■
4) Se $V, W \subseteq \mathbb{R}^4$ sono sottospazi di dimensione 2 allora $V \cap W$ ha dimensione 0.	☐	☒
5) La somma di due autovettori di una matrice A è un autovettore di A.	☐	☒
6) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.	☐	☒
7) i^{28} è un numero reale positivo.	☒	☐
8) Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha sempre due radici quadrate distinte.	☒	☐
9) I vettori $v_1 = (0, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 2, 2)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
10) Se $A = \{k^3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 10 \leq n \leq 50\}$ allora $A \cap B$ contiene un unico elemento.	☒	☐
11) Ogni sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione.	☒	☐
12) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non ha autovalori reali.	☒	☐

Scansionato con CamScanner

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

10 Febbraio 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^5 - \bar{z} = 0.$$

$z^5 = \bar{z}$

In coordinate polari, $z = (\rho, \theta)$ e $\bar{z} = (\rho, -\theta)$ e $z^5 = (\rho^5, 5\theta)$.

Quindi $\begin{cases} \rho^5 = \rho & \Rightarrow \rho(\rho^4 - 1) = 0 \Rightarrow \rho = 0 \text{ o } \rho = 1 \\ 5\theta = -\theta + 2k\pi & \Rightarrow 6\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = k\pi/3 \end{cases}$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
(poi si ripete)

$z_0 = 0 \quad (\rho = 0)$

$\underline{\underline{\rho = 1}}$

$z_1 = (1, 0) \rightsquigarrow z_1 = 1$

$z_2 = (1, \pi/3) \rightsquigarrow z_2 = \cos \pi/3 + i \sin \pi/3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = (1, 2/3\pi) \rightsquigarrow z_3 = \cos 2/3\pi + i \sin 2/3\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_4 = (1, \pi) \rightsquigarrow z_4 = -1$

$z_5 = (1, 4/3\pi) \rightsquigarrow z_5 = \cos 4/3\pi + i \sin 4/3\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_6 = (1, 5/3\pi) \rightarrow z_6 = \cos 5/3\pi + i \sin 5/3\pi = +\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Scansionato con CamScanner

Esercizio 2. [10 pt.]
Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base dell'immagine di T.
2. Determinare una base del nucleo di T.
3. Trovare tutti i vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tali che $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Riduciamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-2I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

1) Una base dell'immagine si ottiene prendendo i vettori colonna "pivot" nella matrice iniziale, cioe':

$$\mathcal{B}_{IMM} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Scansionato con CamScanner

2) Una base del nucleo si ottiene considerando le soluzioni speciali.

Le variabili libere sono x_3 e x_4

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x_2 + 2 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = +1 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow -x_2 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{KER} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Trovo una soluzione particolare ponendo le variabili libere $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2 \Rightarrow 2x_1 - 0 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \Rightarrow -x_2 + 0 - 0 = -1 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ L'insieme delle soluzioni e'

$$S = \{ \vec{x}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker A \} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Scansionato con CamScanner

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

1) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{la I riga}}{\overset{\text{sviluppo lungo}}{=}}$$

$$= (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)^3$$

$\lambda = 1$ autovalore di m.a. 1

$\lambda = -1$ autovalore di m.a. 3

Scansionato con CamScanner

2) $\lambda = 1$ $\quad Aut_A(1) = \ker(A - 1\cdot I)$

$$A - 1\cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{III}]{\text{Scambio}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{Scambio}}$$

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P \quad P \quad L \quad P \end{array}$$

Trovo la soluzione speciale in corrispondenza della variabile libera x_3

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow 4x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ -2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -2x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_1 = \{\vec{s}_1\} \text{ è una base di } Aut_A(1)$$

$\lambda = -1$ $\quad Aut_A(-1) = \ker(A + I)$

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 2\text{I}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P \quad L \quad L \quad L \end{array}$$

Trovo le 3 soluzioni speciali (ci sono tre variabili libere, cioè x_2, x_3, x_4)

Scansionato con CamScanner

$$\left\{ 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \right.$$

$$\begin{array}{lll} x_2 = 1 & x_2 = 0 & x_2 = 0 \\ x_3 = 0 & x_3 = 1 & x_3 = 0 \\ x_4 = 0 & x_4 = 0 & x_4 = 1 \end{array}$$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_{-1} = \{ \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4 \}$ e' una base di $Aut_A(-1)$

3) La matrice e' diagonalizzabile perche' la molt. geom. di $\lambda = 1$ e' 1, la molt. geom. di $\lambda = -1$ e' 3 e c'e' una base di autovettori, cioe'

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e' la matrice "cambio di base"

si ha che $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ diagonale.

Scansionato con CamScanner

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Imm}(T) \subsetneq \mathrm{Ker}(T)$.
2. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(T) \subsetneq \mathrm{Imm}(T)$.
3. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Imm}(T)$.
4. Trovare la matrice associata (rispetto alla base canonica) a tutte le applicazioni lineari $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\ker(T) = \mathrm{Imm}(T) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

1) Ad esempio, poniamo $T(e_1) = 0$

$T(e_2) = e_1$

$T(e_3) = e_1$

ATTENZIONE: $e_2 - e_3 \in \ker T$

~~[illegible]~~ Allora $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Span}\{e_1\}$.

Quindi in questo caso ~~[illegible]~~ $\mathrm{Im}\, T \subsetneq \ker T$

2) Ad esempio, poniamo $T(e_1) = 0$

$T(e_2) = e_1$

$T(e_3) = e_3$

Allora $\ker T = \mathrm{Span}\{e_1\} \subsetneq \mathrm{Im}\, T$

Scansionato con CamScanner

3) Non può esistere una tale T.

Infatti si ha $\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\ker T) = 5$

e quindi NON si può avere $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim(\ker T)$

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker T$, quindi se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è la matrice associata

si ha $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

da cui $a = b$ & $c = d$

$A = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$ Quindi $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right\}$

$= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow a = -c$

Dunque le matrici cercate sono tutte e sole

quelle della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$$ al variare di $a \in \mathbb{R}$

Scansionato con CamScanner