Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

10 Febbraio 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^5 - \overline{z} \;=\; 0.$$

Esercizio 2. **[10 pt.]**
Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base dell'immagine di T.
2. Determinare una base del nucleo di T.
3. Trovare tutti i vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tali che $T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.

2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.

3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Imm}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$.
2. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Imm}(T)$.
3. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Imm}(T)$.
4. Trovare la matrice associata (rispetto alla base canonica) a tutte le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che:
$$\ker(T) = \mathrm{Imm}(T) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$