Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

23 Gennaio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se il prodotto di due matrici $A \cdot B$ non è invertibile, allora almeno una tra A e B non è invertibile.	☒	☐
2) Se $z = 1 - i$ allora $\frac{2z}{z+\bar{z}} = -1 + i$.	☐	☒
3) Se una matrice 3×3 ha un unico autovalore, allora non è diagonalizzabile.	☐	☒
4) Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari. Allora $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$.	☒	☐
5) Se $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{2m - 1 \mid 1 \leq m \leq 7,\ m \in \mathbb{N}\}$ e allora $A \cap B$ contiene un unico elemento.	☐	☒
6) Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^7$. Se $W = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dimensione 3, allora v_1, v_2, v_3 sono lin. indip.	☒	☐
7) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	☐	☒
8) Se una matrice non è invertibile, allora ha una riga di zeri.	☐	☒
9) $(1+i)^4$ è un numero reale negativo.	☒	☐
10) Tutte le basi di $\mathbb{R}^5$ sono formate da esattamente 5 vettori.	☒	☐
11) I vettori $w_1 = (-1, 2)$, $w_2 = (1, -1)$ e $w_3 = (-2, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$.	☐	☒
12) Se l'appl. lin. associata alla matrice A non è iniettiva allora il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ha infinite soluzioni.	☒	☐

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

23 Gennaio 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$\bar{z} + i z^2 = 0.$$

$\bar{z} = -iz^2$.

In coordinate polari: $z = (\rho, \theta) \Rightarrow$

$\bar{z} = (\rho, -\theta)$; $-i = (1, -\frac{\pi}{2})$; $z^2 = (\rho^2, 2\theta)$

$(-i) \cdot z^2 = (\rho^2, 2\theta - \frac{\pi}{2})$.

Dunque $\bar{z} = -iz^2 \Leftrightarrow (\rho, -\theta) = (\rho^2, 2\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho = \rho^2 \Rightarrow \rho = 0 \text{ o } \rho = 1 \\ -\theta = 2\theta - \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \Leftrightarrow \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{6} \pm 2k\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ (poi si ripetono)

Le soluzioni sono:

$z_0 = 0$

$z_1 = (1, \pi/6) \rightsquigarrow z_1 = \cos \pi/6 + i \sin \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

$z_2 = (1, 5/6\, \pi) \rightsquigarrow z_2 = \cos 5/6\, \pi + i \sin 5/6\, \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

$z_3 = (1, \frac{3}{2}\pi) \rightsquigarrow z_3 = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi = -i$

Esercizio 2. **[10 pt.]**
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$$

1. Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Determinare l'insieme $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = (-3,$
3. Verificare che T è suriettiva e determinare un'inversa destra della matrice associata A, cioè una matrice B tale che $A \cdot B = I$.
4. La matrice A ammette inversa sinistra? (Giustificare la risposta).

1. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} P & P & L \end{array}$$

La matrice e' già ridotta

x_3 e' variabile libera. Per trovare una soluzione particolare poniamo $x_3 = 0$ nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow -x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -3$$

$$-x_1 + 3 \cdot (-3) - 0 = -3 \Rightarrow -x_1 - 9 = -3 \Rightarrow x_1 = -6$$

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una base del nucleo si ottiene considerando (l'unica) soluzione speciale, ottenuta ponendo la variabile libera $x_3 = 1$ nel sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$-x_1 + 3\cdot(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow -x_1 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' la soluzione speciale. Dunque

$$\ker T = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ e}$$

$$S = \left\{\vec{x} + \vec{x}_p \mid \vec{x} \in \ker T\right\} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

3. T e' suriettiva perche' ha tanti pivot quante righe, cioe' 2. Cerchiamo un'inversa destra B, cioe' una matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ tale che $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & +3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+3c-e & -b+3d-f \\ -c+e & -d+f \end{pmatrix}$$

Per semplicita' possiamo ad esempio porre $c=d=0$

(e' richiesto di trovare una inversa destra, non tutte!)

$$= \begin{pmatrix} -a-e & -b-f \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} -a-e=1 & \Rightarrow -a-0=1 \quad \Rightarrow a=-1 \\ -b-f=0 & \Rightarrow -b-1=0 \quad \Rightarrow b=-1 \\ e=0 \\ f=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} c=0 \\ d=0 \end{matrix}$$

Una inversa destra e' la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) La matrice A non ha inversa sinistra, altrimenti corrisponderebbe ad una appl. lineare iniettiva, mentre non lo e' perche' A ha una variabile libera.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

① . Il polinomio caratteristico e':

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\lambda & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la I riga)}$$

$$= (-1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la III colonna)}$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)\cdot[-\lambda(2-\lambda)-0]$$

$$= \lambda(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

$\lambda = 0$ autov. con m.a. 1
$\lambda = 2$ autov. con m.a. 2
$\lambda = -1$ autov. con m.a. 1

(2)

$\underline{\lambda = 0}$ $\quad Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{III}-6\text{I} \\ \text{IV}-2\text{I}}]{\text{II}+4\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Scambio II e IV

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

Poniamo la variabile libera $x_4 = 1$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ 2x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\{\vec{s}_1\}$ è una base di $Aut_A(0)$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad Aut_A(2) = \ker(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{III}-2\cdot\text{I} \\ \text{IV}-\frac{2}{3}\text{I}}]{\text{II}+\frac{4}{3}\text{I}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{IV + \frac{1}{2} II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

Le variabili libere sono x_3 e x_4

$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

$$\begin{cases} -3x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 & \Rightarrow -2x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = - \end{cases}$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

$$\begin{cases} -3x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 & \Rightarrow -2x_2 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\vec{S}_2, \vec{S}_3\}$ è una base di $Aut_A(2)$

Quindi $\lambda = 2$ ha molt. geom. $= 2$

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad Aut_A(-1) = \ker(A - (-1I)) = \ker(A + I)$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } I \text{ e } IV}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera è x_3

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 6x_4 = 0 \Rightarrow 3x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = \\ -3x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$-2x_1 + 0 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{\vec{s}_4\}$ è una base di $Aut_A(-1)$

③ La matrice è diagonalizzabile perché ha una base di autovettori $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4\}$

Usando la matrice "cambio di base"

$$S = \left(\vec{s}_1 \,\middle|\, \vec{s}_2 \,\middle|\, \vec{s}_3 \,\middle|\, \vec{s}_4 \right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \lambda=0 & \lambda=2 & \lambda=2 & \lambda=-1 \end{array} \end{array}$$

Si ottiene che $\quad S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. [6pt.]
Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice *proiettore* se $T \circ T = T$, cioè se $T(T(v)) = T(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$.

1. Dimostrare che se T è invertibile, allora $T = id$ è l'identità.
2. Trovare, se esiste, un proiettore T_1 tale che $T_1(1, -1) = (3, 3)$.
3. Trovare, se esiste, un proiettore T_2 che ha $\lambda = -3$ come autovalore.

1) Sia A la matrice associata a T.

Allora $T \circ T = T \iff A \cdot A = A \iff$

$A \circ A - A \circ I = 0 \iff A \circ (A - I) = 0.$

Visto che A e' invertibile,

$A^{-1} \cdot [A \cdot (A - I)] = A^{-1} \cdot 0 \iff$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot (A - I) = 0 \iff$

$I \cdot (A - I) = 0 \iff$

$A - I = 0 \iff A = I$

(2) Se $T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ e T_1 e' un proiettore,

allora $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=T_1\left(T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=T_1\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

il che equivale a $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Visto che $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e' una base di R^2

e deve essere $T_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

concludiamo che esiste, ed unico, il proiettore T_1 cercato.

(3) Non esistono proiettori che hanno $\lambda=-3$ come autovalore. Infatti se λ e' autovalore di T proiettore, prendiamo $v\neq 0$ autovettore di autovalore 3. Allora:

$$\lambda v = T(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda \cdot T(v) =$$
$$= \lambda\cdot\lambda v = \lambda^2 v$$

Ma $\lambda v=\lambda^2 v$ e $v\neq 0$ $\Longrightarrow$

(2) Se $T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ e T_1 e' un proiettore,

allora $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = T_1\left(T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = T_1\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

il che equivale a $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Visto che $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e' una base di $\mathbb{R}^2$

e deve essere $T_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $T_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

concludiamo che esiste, ed unico, il proiettore T_1 cercato.

(3) Non esistono proiettori che hanno $\lambda=-3$ come autovalore. Infatti se λ e' autovalore di T proiettore, prendiamo $v\neq 0$ autovettore di autovalore 3. Allora:

$$\lambda v = T(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda \cdot T(v) = \lambda\cdot\lambda v = \lambda^2 v$$

Ma $\lambda v = \lambda^2 v$ e $v \neq 0$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0$ o $\lambda = 1$

Quindi gli unici autovalori possibili di un proiettore sono $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.