Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

23 Gennaio 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$\overline{z} + i\, z^2 \;=\; 0.$$

Esercizio 2. [10 pt.]
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$$

1. Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

2. Determinare l'insieme $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = (-3, 3)\}$.

3. Verificare che T è suriettiva e determinare un'inversa destra della matrice associata A, cioè una matrice B tale che $A \cdot B = I$.

4. La matrice A ammette inversa sinistra? (Giustificare la risposta).

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 4. [6pt.]

Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice *proiettore* se $T \circ T = T$, cioè se $T(T(v)) = T(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$.

1. Dimostrare che se T è invertibile, allora $T = id$ è l'identità.
2. Trovare, se esiste, un proiettore T_1 tale che $T_1(1, -1) = (3, 3)$.
3. Trovare, se esiste, un proiettore T_2 che ha $\lambda = -3$ come autovalore.