Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

7 Gennaio 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$\overline{z} \;=\; 36\, z^3.$$

Esercizio 2. **[10 pt.]**
Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla seguente matrice nella base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di T.
2. Determinare l'insieme $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (2, 1, 3, -1)\}$.
3. Calcolare i valori $T(T(\mathbf{e}_1))$, $T(T(\mathbf{e}_2))$, $T(T(\mathbf{e}_3))$, $T(T(\mathbf{e}_4))$ della composizione di T con se stessa sui quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare $(T \circ T) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.

2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.

3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
   - Il vettore $v_1 = (0, 0, 1)$ è un autovettore con autovalore -2;
   - Il vettore $v_2 = (1, 1, 0)$ è un autovettore con autovalore 1;
   - f non è invertibile.
2. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.
3. Esiste un'unica applicazione lineare f che soddisfa le proprietà (1)? Se sì, motiva la risposta; se no, mostra due esempi distinti di appl. lineari che soddisfano (1).