Es. 1 $\qquad z^4+2z^3+z^2=4$

$$z^4+2z^3+z^2 = z^2(z^2+2z+1) = z^2(z+1)^2 \Longrightarrow$$

$$[z(z+1)]^2 = 4 \Longrightarrow$$

$$z(z+1)=2 \quad \text{oppure} \quad z(z+1)=-2$$

I) $z(z+1)=2 \iff z^2+z-2=0$

$$z = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

II) $z(z+1)=-2 \iff z^2+z+2=0$

$$z = \frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2} \begin{cases} \nearrow \frac{-1-\sqrt{7}i}{2} \\ \searrow \frac{-1+\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$$

Le quattro soluzioni sono:

$$z_1=-2, \quad z_2=1, \quad z_3=\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}, \quad z_4=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$$

Es. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Dobbiamo risolvere il sistema $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ 2 + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \\ 2 + 1 + x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = -1 \end{array}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e' l'unica soluzione di $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

cioe' $\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2) g e' la composizione $f \circ f$ dell'appl. lineare f con se stessa. Quindi la matrice associata a g e' il prodotto della matrice A con se stessa.

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) La matrice associata a f^{-1} è la matrice A^{-1} inversa di A. Troviamola:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0}}^{Id}} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\hphantom{0\ 0\ 1}}_{Id}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\ -1\ 1}}_{A^{-1}}} \end{array}\right)$$

Quindi la matrice inversa è $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $g(\vec{v}) = f^{-1}(\vec{v}) \iff A \cdot A \cdot \vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{v} \iff$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambiando la I e la II riga e poi la II con la III si trova

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 0 \\ 3x_2 = 0 \end{cases}$$

variabile libera x_3

$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ $\qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' l'unica soluzione speciale.

Quindi $\mathcal{S}_2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

1.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} (1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)\left[(-1-\lambda)(4-\lambda)+6\right] =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

$\lambda = 1$ autovalore con m.a. 2

$\lambda = 2$ autovalore con m.a. 2

2. $\lambda = 1.$

$$Aut(A,1) = \ker(A - 1\cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III - II} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} L & P & P & L \end{matrix}$$

Ci sono due variabili libere, cioè x_1 e x_4. La molt. geom. è 2.

$$\begin{cases} -2x_2 \quad -3x_4 = 0 \\ x_3 \quad = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2x_2 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ autovettore di autovalore $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} -2x_2 \quad -3x_4 = 0 \\ x_3 \quad = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2} \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ autovettore di autovalore $\lambda = 1$

$\boxed{\lambda = 2}$ $\quad Aut(A, 2) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{2}{3} II} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix}$$

Ci sono due variabili libere, cioè x_3 e x_4. La molt. geom. è 2.

$$\begin{cases} -x_1 \quad + x_3 \quad = 0 \\ -3x_2 \quad + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -3x_2 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ autovettore di autovalore $\lambda = 2$

$$\begin{cases} -x_1 \quad +x_3 \quad = 0 \\ -3x_2 \quad -3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -3x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ autovettore di autovalore $\lambda = 2$

(3.) I vettori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ formano una base di autovettori. La matrice "cambio di base":

$$S = \left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \vec{v}_3 \middle| \vec{v}_4 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice diagonale avente sulla diagonale i rispettivi autovalori:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono tali che $S^{-1} A S = D$.

Esercizio 4. **[6pt.]**
Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un *proiettore* se, dato qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^2$, vale $f(f(v)) = f(v)$.

1. Trovare un proiettore f_1 diverso dalla funzione identità $x \mapsto x$ e dalla funzione nulla $x \mapsto 0$.
2. Trovare, se esiste, un proiettore f_2 tale che $f_2(1, 2) = (3, 3)$.
3. Trovare, se esiste, un proiettore f_3 avente l'autovalore $\lambda = 2$.

1

Se A e' la matrice associata ad un proiettore f, allora

$$A \cdot A = A \iff A \cdot A - A = 0 \iff A \cdot (A - I) = 0$$

Se A e' invertibile, allora da $A(A-I)=0$ segue che

$$A^{-1} \cdot A\,(A - I) = A - I = 0,$$ cioe' $A = I$ e' l'identità!

Visto che assumiamo f diverso dalla funzione nulla, possiamo assumere che A non sia invertibile, cioe' $\ker A \neq \{0\}$. Allora $\dim(\ker A) \geq 1$.

Notiamo che $\dim(\ker(A)) \neq 2$, altrimenti $A = 0$ sarebbe la matrice nulla, contro l'ipotesi che f e' un proiettore diverso dalla funzione nulla.

Allora $\dim(\ker(A)) = 1$. Per semplicità, assumiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A$, cioe' $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e che $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Allora $A = \begin{pmatrix}0 & a\\0 & b\end{pmatrix}$ e' un proiettore diverso

dalla funzione identita' e diverso dalla funzione nulla

per ogni scelta di $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

2 $A \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$a = 3/2$

$b = 3/2$. Allora il proiettore la cui matrice

associata e' $A = \begin{pmatrix}0 & 3/2\\0 & 3/2\end{pmatrix}$ soddisfa

la proprieta' richiesta.

3 $A - \lambda I = \begin{pmatrix}-\lambda & a\\0 & b-\lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{\det} -\lambda(b-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ e $\lambda = b$ sono autovalori.

Se prendiamo $b = 2$, allora per ogni a

la matrice $A = \begin{pmatrix}0 & a\\0 & 2\end{pmatrix}$ e' un proiettore

avente l'autovalore $\lambda = 2$.