Geometria — Compito scritto del 15 Febbraio 2021

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [10 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni (x_1, x_2, x_3, x_4) del seguente sistema lineare in 2 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

2. Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \in \mathbb{R}^4$ i vettori della base canonica. Scrivere la matrice A associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove $T(\mathbf{e}_1) = (1, -2, 3, 0)$, $T(\mathbf{e}_2) = (0, -1, -1, 0)$, $T(\mathbf{e}_3) = (2, 4, -3, 1)$, e $T(\mathbf{e}_4) = (0, 0, 1, 0)$.

Esercizio 2. [12 pt.] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A, e determinare gli autovalori reali e la loro molteplicità algebrica.

2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.

3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 3. [8 pt.] Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione:

$$\overline{z} \cdot z^3 + 16i = 0$$

Esercizio 4.***
Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

1. f non è invertibile

2. $f(1, -2, 0) = (-2, 4, 0)$

3. f è diagonalizzabile.

Scrivere poi la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.