ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
Dispensa 10

Mauro Di Nasso

Ultimo aggiornamento: December 17, 2024

Algebra cardinale e cofinalità

1. Somme, prodotti, esponenziazioni

Ricordiamo ora alcune nozioni riguardanti la cardinalità che avevamo presentato nella parte "intuitiva" della teoria degli insiemi.

Se A è finito, avevamo denotato con $|A|$ quell'unico numero naturale $n \in \omega$ equipotente ad A, e quindi scrivevamo $|A| = n$. Possiamo adesso fare una cosa analoga per tutti gli insiemi, anche infiniti, grazie ai cardinali.

Definizione 1.1. (AC) Per ogni insieme A, denotiamo con $|A|$ quell'unico cardinale κ tale che $|\kappa| = |A|$. In questo caso scriviamo

$$|A| = \kappa.$$

Nota bene 1.2. Senza usare AC, la definizione di sopra ha senso per ogni insieme bene ordinabile, ma non in generale. Ad esempio, se non assumiamo che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ sia bene ordinabile, non potremmo avere l'esistenza di un cardinale ad esso equipotente.

Attenzione. Da qui in avanti assumeremo sempre l'assioma di scelta, salvo indicazione contraria.

Definizione 1.3. Siano μ, ν cardinali. Diciamo che $\mu \leq \nu$ se esiste una funzione iniettiva $f : \mu \to \nu$.

Chiaramente, la relazione d'ordine $\leq$ definita sopra coincide con la relazione d'ordine tra ordinali; in particolare, da $\kappa \leq \mu$ e $\mu \leq \kappa$ segue che $\kappa = \mu$. In conseguenza di questa banale osservazione, possiamo ottenere una dimostrazione alternativa del teorema di Cantor-Bernstein, che però richiede l'assunzione che ogni insieme sia equipotente ad un cardinale, e quindi l'intera potenza dell'assioma di scelta.

Introduciamo finalmente l'algebra cardinale, definendo le operazioni di somma, prodotto, ed esponenziazione tra cardinali.

Definizione 1.4. Siano μ, ν cardinali. Allora

- $\mu + \nu = |A \cup B|$ dove A, B sono insiemi disgiunti con $|A| = \mu$ e $|B| = \nu$;
- $\mu \cdot \nu = |A \times B|$ dove A, B sono insiemi con $|A| = \mu$ e $|B| = \nu$;
- $\mu^\nu = |\mathrm{Fun}(A, B)|$ dove A, B sono insiemi con $|A| = \nu$ e $|B| = \mu$.[1]

Che le definizioni di sopra sono ben poste, segue dalle proprietà raccolte nel seguente esercizio, che in realtà abbiamo già considerato nel capitolo **??**.[2]

Esercizio 1.5. Supponiamo che $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$. Allora:

(1) $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ se $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$.
(2) $|A \times B| = |A' \times B'|$.
(3) $|\mathrm{Fun}(A, B)| = |\mathrm{Fun}(A', B')|$.

[1] Ricordiamo che con $\mathrm{Fun}(A, B)$ oppure con B^A si denota l'insieme delle funzioni con dominio A a valori in B.

[2] Vedi Esercizio **??**.

Esercizio 1.6. Per ogni cardinale κ e per ogni naturale positivo n si ha:

$$\kappa \cdot n = \underbrace{\kappa + \ldots + \kappa}_{n \text{ volte}} \quad e \quad \kappa^n = \underbrace{\kappa \cdot \ldots \cdot \kappa}_{n \text{ volte}}.$$

Le prime fondamentali proprietà delle operazioni cardinali di somma, prodotto, ed esponenziazione cardinale sono raccolte nella seguente proposizione.

Proposizione 1.7. *Siano $\kappa, \kappa', \mu, \mu', \nu$ cardinali. Allora valgono:*

(1) *Proprietà associative della somma e del prodotto:*
- $\kappa + (\mu + \nu) = (\kappa + \mu) + \nu$.
- $\kappa \cdot (\mu \cdot \nu) = (\kappa \cdot \mu) \cdot \nu$.

(2) *Proprietà commutative della somma e del prodotto:*
- $\kappa + \mu = \mu + \kappa$.
- $\kappa \cdot \mu = \mu \cdot \kappa$.

(3) *Proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto:*
- $\kappa \cdot (\mu + \nu) = (\kappa \cdot \mu) + (\kappa \cdot \nu)$.

(4) *Proprietà di monotonia della somma, del prodotto, e dell'esponenziazione:*
- *Se $\kappa' \leq \kappa$ e $\mu' \leq \mu$ allora $\kappa' + \mu' \leq \kappa + \mu$.*
- *Se $\kappa' \leq \kappa$ e $\mu' \leq \mu$ allora $\kappa' \cdot \mu' \leq \kappa \cdot \mu$.*
- *Se $\kappa' \leq \kappa$ e $\mu' \leq \mu$ allora $(\kappa')^{\mu'} \leq \kappa^{\mu}$.*

Dim. Per esercizio.[3] □

Valgono inoltre le seguenti proprietà tipiche dell'esponenziazione:

Proposizione 1.8. *Siano κ, μ, ν cardinali. Allora:*

(1) $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^{\mu} \cdot \kappa^{\nu}$.
(2) $(\kappa^{\mu})^{\nu} = \kappa^{\mu \cdot \nu}$.
(3) $(\kappa \cdot \mu)^{\nu} = \kappa^{\nu} \cdot \mu^{\nu}$.

Dim. Per esercizio. □

Segue direttamente dalle definizioni che per ogni cardinale $\kappa \neq 0$ si ha:

- $\kappa + 0 = \kappa$
- $\kappa \cdot 0 = 0$
- $\kappa \cdot 1 = \kappa$.
- $\kappa^1 = \kappa$.
- $1^{\kappa} = 1$.

Esercizio 1.9. Sia n un naturale positivo. Allora $n + \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = (\aleph_0)^n = \aleph_0$.

Ricordiamo che in base al Teorema di Cantor si ha $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ per ogni insieme A. Come abbiamo già osservato nel capitolo **??**, c'è una bigezione naturale tra $\mathcal{P}(A)$ e $\mathrm{Fun}(A, \{0,1\})$ che si ottiene associando ad ogni sottoinsieme $X \subseteq A$ la corrispondente funzione caratteristica $1_X : A \to \{0,1\}$. Quindi, per ogni cardinale κ si ha $|\mathcal{P}(k)| = |\mathrm{Fun}(\kappa, \{0,1\})|$, e perciò:

- $2^k > \kappa$.

In particolare, la cardinalità del *continuo* è più che numerabile:

- $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

---

[3] La proprietà (4) è già stata considerata nel capitolo **??**, Esercizio **??**.

Nota bene 1.10. Gli assiomi di ZFC non permettono di stabilire quale tra i cardinali maggiori di κ sia uguale a 2^κ. A questo riguardo, valgono i seguenti importanti risultati, che sono stati dimostrati usando strumenti avanzati di logica matematica.

- (Gödel 1938). Gli assiomi di ZFC non consentono di refutare la seguente proprietà, nota come *ipotesi generalizzata del continuo* (GCH):
  - *Per ogni cardinale infinito κ, si ha che $2^\kappa = \kappa^+$ è il cardinale successore di κ.*

  In particolare, è consistente con ZFC assumere che $\mathfrak{c} = \aleph_1$.
- (Cohen 1963). Gli assiomi di ZFC non consentono di dimostrare la seguente proprietà, nota come *ipotesi del continuo* (CH):
  - $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

  In particolare, è consistente con ZFC assumere che $\mathfrak{c} > \aleph_1$.

Esercizio 1.11. Sia n un naturale positivo. Allora:

$$n + \mathfrak{c} = \aleph_0 + \mathfrak{c} = n \cdot \mathfrak{c} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = {\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Il Teorema **??**, in base al quale $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = |\aleph_\alpha|$ per ogni α, ci dice che:

- $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ per ogni cardinale infinito κ.

Come conseguenza dell'idempotenza del prodotto tra cardinali infiniti $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, l'algebra cardinale relativa a somme e prodotti si rivela banale, come mostra la seguente

Proposizione 1.12. *Siano $\kappa, \mu \neq 0$ cardinali dove almeno uno dei due è infinito. Allora*

$$\kappa + \mu \;=\; \kappa \cdot \mu \;=\; \max\{\kappa, \mu\}.$$

Dim. Senza perdita di generalità supponiamo $\kappa \geq \mu$, dunque κ è infinito e $\max\{\kappa, \mu\} = \kappa$. Se $\mu = 1$ la tesi è banale perché $\kappa + 1 = \kappa$ (visto che κ è infinito) e $\kappa \cdot 1 = \kappa$. Altrimenti, quando $\mu \geq 2$ abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$\kappa \leq \kappa + \mu \leq \kappa + \kappa = \kappa \cdot 2 \leq \kappa \cdot \mu \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

□

Come corollario si ricava il seguente risultato generale sui complementi relativi. Ricordiamo che i casi particolari per la cardinalità numerabile $\aleph_0$ e la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$ sono già stati dimostrati nel capitolo **??**, senza usare l'assioma di scelta.[4]

Proposizione 1.13. *Sia $A \subseteq B$ dove B è un insieme infinito. Se $|A| < |B|$ allora $|B \setminus A| = |B|$.*

Dim. Se A è vuoto la tesi è banale. Se $|A| \neq 0$, possiamo applicare la proposizione precedente, ed otteniamo:

$$|B| \;=\; |B \setminus A| + |A| \;=\; \max\{|B \setminus A|\,,\, |A|\}.$$

Visto che $|A| < |B|$, deve essere $|B| = |B \setminus A|$. □

Esercizio 1.14. Siano $\kappa \geq \nu$ cardinali infiniti. Allora i seguenti insiemi hanno cardinalità κ^ν:

[4] Vedi Proposizione **??** e Esercizio **??**.

- $[\kappa]^{\leq\nu} := \{A \subseteq \kappa \mid |A| \leq \nu\}$.
- $[\kappa]^{\nu} := \{A \subseteq \kappa \mid |A| = \nu\}$.

Esercizio 1.15. Siano α, β ordinali infiniti. Allora

$$|\alpha + \beta| = |\alpha \cdot \beta| = |\alpha^{\beta}| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Quando la base è "piccola" rispetto all'esponente "grande", l'esponenziazione tra cardinali coincide con la cardinalità dell'insieme delle parti dell'insieme "grande".

Proposizione 1.16. *Sia κ un cardinale infinito e supponiamo che $2 \leq \mu \leq 2^{\kappa}$. Allora $\mu^{\kappa} = 2^{\kappa}$. In particolare, $\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$ per ogni cardinale infinito.*

Dim. Vale la catena di disuguaglianze: $2^{\kappa} \leq \mu^{\kappa} \leq (2^{\kappa})^{\kappa} = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^{\kappa}$. □

2. La sequenza dei beth e i limiti forti

Definizione 2.1. La sequenza degli *beth* è definita per ricorsione transfinita come segue:

$$\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0\,; \\ \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}\,; \\ \beth_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Notiamo che, rispetto alla definizione della sequenza degli aleph, al passo successore qua si considera la cardinalità dell'insieme delle parti $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} = |\mathcal{P}(\beth_\alpha)|$ anziché il cardinale successore $\aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha) = (\aleph_\alpha)^+$. Per il Teorema di Cantor, sappiamo che per ogni cardinale κ si ha $2^{\kappa} > \kappa$, e quindi $2^{\kappa} \geq \kappa^+$. Di conseguenza, è immediato verificare per induzione transfinita che vale la disuguaglianza:

Osservazione 2.2. *Per ogni ordinale α si ha $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$.*

Ricordiamo che l'ipotesi generalizzata del continuo GCH afferma che $2^{\kappa} = \kappa^+$ è il cardinale successore di κ, per ogni cardinale infinito κ. Sotto questa ipotesi la sequenza dei beth e la sequenza degli aleph coincidono.

Proposizione 2.3. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *Ipotesi generalizzata del continuo (GCH):*
$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ *per ogni ordinale α.*
(2) $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$ *per ogni ordinale α.*

Dim. Per esercizio. □

Esercizio 2.4.

(1) La sequenza dei beth ha punti fissi arbitrariamente grandi, cioè per ogni ordinale α esiste $\beta > \alpha$ tale che $\beth_\beta = \beta$.
(2) La classe $\mathrm{Fix}(\beth) = \{\alpha \in \mathbf{ORD} \mid \beth_\alpha = \alpha\}$ è una classe propria.

Definizione 2.5. Un cardinale κ si dice *limite forte* se per tutti i cardinali $\mu, \nu < \kappa$ si ha $\mu^{\nu} < \kappa$.

Osservazione 2.6. *Se il cardinale κ è limite forte allora κ è un cardinale limite.*

Dim. Intanto notiamo che $\kappa = \aleph_0$ è sia limite forte che limite. Se $\kappa > \aleph_0$ non è un cardinale limite, allora $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ per un opportuno α. Visto che $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1} = \kappa$ dove $2, \aleph_\alpha < \kappa$, concludiamo che κ non è un limite forte. $\square$

Il prossimo risultato fornisce una caratterizzazione dei limiti forti come punti limite della sequenza dei beth.

Proposizione 2.7. *Un cardinale $\kappa > \aleph_0$ è limite forte se e solo se è un punto limite della sequenza dei beth, cioè $\kappa = \beth_\lambda$ dove λ è un ordinale limite.*

Dim. Visto che $\alpha \leq \beth_\alpha$, la sequenza dei beth è illimitata, e quindi possiamo considerare $\gamma := \min\{\beta \mid \kappa < \beth_\beta\}$. Osserviamo che $\gamma \neq 0$ perché $\kappa > \aleph_0$. Inoltre γ non è limite, altrimenti $\kappa < \beth_\gamma = \bigcap_{\gamma<\alpha} \beth_\gamma$ implicherebbe $\kappa < \beth_\gamma$ per un oppurtuno $\gamma < \alpha$, contro la minimalità di α. Allora $\alpha = \beta + 1$ deve essere un successore, e si ha $\beth_\beta \leq \kappa < \beth_{\beta+1}$. Non è possibile che $\beth_\beta < \kappa$, altrimenti $2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} = \kappa$, contro l'ipotesi di κ limite forte. Resta quindi dimostrato che $\kappa = \beth_\beta$. Infine osserviamo che per ogni α, il cardinale $\beth_{\alpha+1}$ non è limite forte, perché $2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$ dove $2, \beth_\alpha < \beth_{\alpha+1}$. Per esclusione, deve allora essere $\kappa = \beth_\beta$ dove β è limite. $\square$

Esercizio 2.8. Il cardinale $\aleph_\omega$ è limite forte se e solo se $\aleph_\omega = \beth_\omega$.

3. Somme infinite

Come abbiamo visto, le somme e i prodotti di cardinali si possono calcolare in modo semplicissimo, perché corrispondono al massimo dei due cardinali considerati. Più interessante è la nozione di somma infinita di cardinali, che vediamo in questa sezione, e quella di prodotto infinito di cardinali, che vedremo nella prossima.

Esattamente come per la somma di due cardinali, la somma infinita di cardinali è definita mediante unioni disgiunte.

Definizione 3.1. Sia $(\kappa_i \mid i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali. La *somma infinita* è definita ponendo:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|$$

dove gli insiemi $|A_i| = \kappa_i$ sono a due a due disgiunti.

Esercizio 3.2. Verificare che la definizione di sopra è ben posta, cioè che per ogni sequenza infinita $(\kappa_i \mid i \in I)$ di cardinali, si ha:

- Esiste una sequenza di insiemi $(A_i \mid i \in I)$ tali che $|A_i| = \kappa_i$ e $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ per $i \neq j$.
- Se $(A_i \mid i \in I)$ e $(B_i \mid i \in I)$ sono due sequenze di insiemi tali che $|A_i| = |B_i|$ e $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora $|\bigcup_{i\in I} A_i| = |\bigcup_{i\in I} B_i|$.

Esempio 3.3. $\sum_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$. Infatti banalmente $\aleph_m < \sum_{n<\omega} \aleph_n$ per ogni $m < \omega$, e quindi $\aleph_\omega = \sup_{m<\omega} \aleph_m \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_n$. Per l'altra disuguaglianza, osserviamo che

$$\sum_{n\in\omega} \aleph_n = \left|\bigcup_{n\in\omega} (\aleph_n \times \{n\})\right| \leq |\aleph_\omega \times \omega| = \aleph_\omega \cdot \aleph_0 = \aleph_\omega.$$

Le seguenti proprietà fondamentali delle somme infinite di cardinali seguono direttamente dalle definizioni, e la loro dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esercizio 3.4. Nel caso di somme infinite dove tutti gli addendi sono uguali:

$$\sum_{i\in I} \kappa = \kappa \cdot |I|.$$

In particolare, $\sum_{i\in I} 1 = |I|$.

Anche le somme infinite sono coerenti rispetto alle disuguaglianze deboli.

Esercizio 3.5. Siano $(\kappa_i \mid i \in I)$ e $(\mu_i \mid i \in I)$ due sequenze infinite di cardinali dove $\kappa_i \le \mu_i$ per ogni $i \in I$. Allora $\sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \mu_i$.

Abbiamo già visto che unioni numerabili di insiemi al più numerabili è numerabile. Abbiamo anche visto che un'analoga proprietà vale relativamente alla cardinalità del continuo.

Esercizio 3.6. Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di insiemi (non necessariamente a due a due disgiunti). Sia κ un cardinale infinito e supponiamo che $|A_i| \le \kappa$ per ogni $i \in I$ e $|I| \le \kappa$. Allora $|\bigcup_{i\in I} A_i| \le \kappa$.

Esercizio 3.7. Sia $(I, <)$ un insieme ordinato infinito e sia $(A_i \mid i \in I)$ una sequenza di insiemi (non necessariamente a due a due disgiunti). Allora:

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \le \sum_{i\in I} |A_i|.$$

Il risultato seguente ci fornisce una semplice formula per il calcolo delle somme infinite di cardinali.

Teorema 3.8. *Sia $(\kappa_i \mid i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali diversi da 0. Allora*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \max\left\{\sup_{i\in I} \kappa_i, |I|\right\}.$$

Dim. Per comodità, denotiamo con $\kappa := \sup_{i\in I} \kappa_i$. Per ogni $j \in I$ si ha che $\sum_{i\in I} \kappa_i \ge \kappa_j$, e quindi $\sum_{i\in I} \kappa_i \ge \kappa$. Inoltre, $\sum_{i\in I} \kappa_i \ge \sum_{i\in I} 1 = |I|$. Concludiamo allora che $\sum_{i\in I} \kappa_i \ge \max\{\kappa, |I|\}$. Per l'altra disuguaglianza, basta osservare che $\sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \kappa = \kappa \cdot |I| = \max\{\kappa, |I|\}$. $\square$

Esercizio 3.9. Sia $(I, <)$ un insieme ordinato infinito e sia $(A_i \mid i \in I)$ una sequenza di insiemi. Se $A_i \supsetneq \bigcup_{j<i} A_j$ per ogni $i \in I$ allora $|\bigcup_{i\in I} A_i| = \sum_{i\in I} |A_i|$.

Esercizio 3.10. Sia $(I, <)$ un insieme ordinato senza massimo e sia $(A_i \mid i \in I)$ una sequenza di insiemi.

(1) Se $(I, <)$ è bene ordinato e la sequenza è crescente, cioè $A_i \subsetneq A_j$ per tutti gli $i < j$, allora $|\bigcup_{i\in I} A_i| = \sum_{i\in I} |A_i|$.
(2) Vale la proprietà (1) senza l'ipotesi di $(I, <)$ bene ordinato?

Concludiamo questa sezione con un significativo esempio di applicazione degli ordinali e del calcolo delle cardinalità di unioni infinite. Mostreremo che la cardinalità dei sottoinsiemi Boreliani di $\mathbb{R}$ (o più in generale di $\mathbb{R}^n$) ha la cardinalità $\mathfrak{c}$ del continuo. Di conseguenza, non solo esistono insiemi che non sono Boreliani, ma la famiglia degli insiemi non Boreliani ha la stessa cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$ della famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 3.11. La famiglia dei *Boreliani* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene tutti gli aperti.[5]

PROPOSIZIONE 3.12. *La famiglia dei* Boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ha la cardinalità del continuo* $\mathfrak{c}$.

DIM. Per ricorsione transfinita, definiamo la seguente sequenza crescente di insiemi:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ è aperto}\} \\ \mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}_\alpha \cup \{X^c \mid X \in \mathcal{B}_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n<\omega} X_n \mid X_n \in \mathcal{B}_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n<\omega} X_n \mid X_n \in \mathcal{B}_\alpha\} \\ \mathcal{B}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{B}_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Poniamo poi $\widetilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$. Visto che $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contiene tutti gli aperti, ed è una σ-algebra, è immediato verificare per induzione transfinita che $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per ogni $\alpha < \omega_1$; dunque $\widetilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Osserviamo inoltre che $\widetilde{\mathcal{B}}$ stessa è una σ-algebra che contiene tutti gli aperti e quindi, per minimalità, deve essere $\widetilde{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Verifichiamo in dettaglio questa proprietà.

Se $A \in \widetilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$, allora esiste $\alpha < \omega_1$ con $A \in \mathcal{B}_\alpha$, e quindi il complementare $A^c \in \mathcal{B}_{\alpha+1} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$. Inoltre, se $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ è una famiglia numerabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definisco $\gamma_n = \min\{\alpha \mid A_n \in \mathcal{B}_\alpha\}$, e considero $\gamma = \sup_n \gamma_n = \bigcup_n \gamma_n$. Osserviamo che γ è numerabile, visto che è unione numerabile di ordinali numerabili, e quindi $\gamma \in \omega_1$. Dunque $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}_\gamma$, e perciò $\bigcup_n A_n, \bigcap_n A_n \in \mathcal{B}_{\gamma+1} \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}$, come volevamo.

Adesso procediamo per induzione transfinita, e dimostriamo che $|B_\alpha| = \mathfrak{c}$ per ogni $\alpha < \omega_1$. Abbiamo già visto che la famiglia $\mathcal{B}_0$ di tutti gli aperti di $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$ (vedi Esercizio **??**), e quindi vale la base di induzione. Al passo successore $\alpha + 1$, consideriamo le funzioni:

$$\psi : \mathcal{B}_\alpha \times \{0, 1\} \to \mathcal{B}_{\alpha+1} \quad \text{e} \quad \theta : \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{B}_\alpha) \times \{0, 1\} \to \mathcal{B}_{\alpha+1},$$

dove $\psi(A, 0) = A$, $\psi(A, 1) = A^c$, $\theta(\sigma, 0) = \bigcup_n \sigma(n)$ e $\theta(\sigma, 1) = \bigcap_n \sigma(n)$. Osserviamo che l'immagine di ψ consiste di tutti gli elementi di $\mathcal{B}_\alpha$ e dei loro complementi, e l'immagine di θ consiste di tutte le unioni e intersezioni numerabili di elementi di $\mathcal{B}_\alpha$. Ma allora, usando l'ipotesi induttiva $|\mathcal{B}_\alpha| = \mathfrak{c}$, si ha:

$$|\mathcal{B}_{\alpha+1}| = |\mathrm{imm}(\psi) \cup \mathrm{imm}(\theta)| \leq |\mathcal{B}_\alpha \times \{0, 1\}| + |\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{B}_\alpha) \times \{0, 1\}| = \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Il caso limite $\lambda < \omega_1$ segue facilmente notando che:

$$\mathfrak{c} = |\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}_\lambda| \leq \sum_{\alpha<\lambda} |\mathcal{B}_\alpha| = \max\{|\lambda|, \sup_{\alpha<\lambda} |\mathcal{B}_\alpha|\} = \max\{\aleph_0, \mathfrak{c}\} = \mathfrak{c}.$$

Possiamo infine concludere che:

$$\mathfrak{c} = |\mathcal{B}_0| \leq |\widetilde{\mathcal{B}}| \leq \sum_{\alpha<\omega_1} |\mathcal{B}_\alpha| = \max\{|\omega_1|, \sup_{\alpha<\omega_1} |\mathcal{B}_\alpha|\} = \max\{\aleph_1, \mathfrak{c}\} = \mathfrak{c}.$$

□

[5] Ricordiamo che una σ-algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complementi, e chiusa per intersezioni e unioni numerabili.

4. Prodotti infiniti

Analogamente al prodotto di due cardinali, il prodotto infinito di cardinali è definito mediante prodotti cartesiani. Osserviamo che è necessario l'assioma di scelta per rendere non banale la seguente definizione, visto che altrimenti potremmo avere sequenze di insiemi non vuoti il cui prodotto cartesiano infinito è vuoto.

Definizione 4.1. Sia $(\kappa_i \mid i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali diversi da 0. Il *prodotto infinito* è definita ponendo:

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \Big| \bigtimes_{i\in I} A_i \Big|$$

dove gli insiemi $|A_i| = \kappa_i$.

Esercizio 4.2. Verificare che la definizione di sopra è ben posta, cioè che per ogni sequenza infinita $(\kappa_i \mid i \in I)$ di cardinali, si ha:

- Se $(A_i \mid i \in I)$ e $(B_i \mid i \in I)$ sono due sequenze di insiemi tali che $|A_i| = |B_i|$ per ogni $i \in I$, allora $|\bigtimes_{i\in I} A_i| = |\bigtimes_{i\in I} B_i|$.

Le seguenti proprietà fondamentali delle somme infinite di cardinali seguono direttamente dalle definizioni, e la loro dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esercizio 4.3. Nel caso di prodotti infiniti dove tutti i fattori sono uguali:

$$\prod_{i\in I} \kappa = \kappa^{|I|}.$$

I prodotti infiniti sono coerenti rispetto alle disuguaglianze deboli.

Esercizio 4.4. Siano $(\kappa_i \mid i \in I)$ e $(\mu_i \mid i \in I)$ due sequenze infinite di cardinali dove $0 < \kappa_i \le \mu_i$ per ogni $i \in I$. Allora $\prod_{i\in I} \kappa_i \le \prod_{i\in I} \mu_i$.

Esercizio 4.5. Vale la seguente proprietà commutativa generalizzata. Per ogni sequenza infinita $(\kappa_i \mid i \in I)$ di cardinali diversi da 0 e per ogni permutazione $\sigma : I \to I$, si ha:

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} \kappa_{\sigma(i)}.$$

Esercizio 4.6. Vale la seguente proprietà associativa generalizzata. Per ogni sequenza infinita $(\kappa_i \mid i \in I)$ di cardinali diversi da 0 e per ogni partizione $I = \bigcup_{s\in S} I_s$ si ha:[6]

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{s\in S} \left(\prod_{i\in I_s} \kappa_i \right).$$

Un primo semplice esempio di prodotto infinito si ottiene considerando la sequenza dei cardinali finiti diversi da 0.

Esempio 4.7. $\prod_{0<n<\omega} n = \mathfrak{c}$. Infatti $\prod_{0<n<\omega} n = \prod_{2\le n<\omega} n \ge \prod_{2\le n<\omega} 2 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$; inoltre $\prod_{0<n<\omega} \le \prod_{0<n<\omega} \aleph_0 = (\aleph_0)^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Un esempio più interessante è il seguente.

[6] Ricordiamo che $I = \bigcup_{s\in S} I_s$ è una partizione se i pezzi I_s sono a due a due disgiunti.

ESEMPIO 4.8. $\prod_{n<\omega} \aleph_n = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.[7] Poiché ogni $\aleph_n < \aleph_\omega$ per ogni n, si ha subito la disuguaglianza: $\prod_{n<\omega} \aleph_n \leq \prod_{n<\omega} \aleph_\omega = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$. L'altra disuguaglianza non è immediata. Per ottenerla, partizioniamo $\omega = \bigcup_{k<\omega} I_k$ in infiniti pezzi infiniti; ad esempio se $\{p_1 < \ldots < p_k < \ldots\}$ è l'insieme dei numeri primi, per $k \geq 1$ si può prendere come I_k l'insieme delle potenze del k-esimo primo p_k, e come I_0 il complementare di $\bigcup_{1\leq k<\omega} I_k$. Osserviamo che per ogni $k \in \omega$, il prodotto infinito $\prod_{n\in I_k} \aleph_n$ è maggiore o uguale di ciascuno dei suoi fattori, e quindi $\prod_{n\in I_k} \aleph_n \geq \sup_{n\in I_k} \aleph_n$; osserviamo inoltre che $\sup_{n\in I_k} \aleph_n = \aleph_\omega$, visto che I_k è infinito e quindi è illimitato in ω. Infine, usando la proprietà associativa generalizzata, si ottiene che: $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \prod_{k\in\omega} \left(\prod_{n\in I_k} \aleph_n\right) \geq \prod_{k\in\omega} \aleph_\omega = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

Generalizzando l'idea sviluppata nell'esempio precedente, siamo in grado di dimostrare una formula generale per il calcolo di prodotti infiniti di cardinali.

TEOREMA 4.9. *Sia ν un cardinale infinito, e sia $(\kappa_\alpha \mid \alpha \in \nu)$ una sequenza non-decrescente di cardinali $\kappa_\alpha \neq 0$. Allora*

$$\prod_{\alpha\in\nu} \kappa_\alpha = \left(\sup_{\alpha\in\nu} \kappa_\alpha\right)^\nu .$$

DIM. Denotiamo con $\kappa := \sup_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha$. Banalmente per ogni $\alpha < \nu$ si ha $\kappa_\alpha \leq \kappa$, e quindi $\prod_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha \leq \prod_{\alpha<\nu} \kappa = \kappa^\nu$.

Per vedere l'altra disuguaglianza, partizioniamo $\nu = \bigcup_{\beta<\nu} A_\beta$ in ν pezzi ognuno di cardinalità $|A_\beta| = \nu$. Per vedere che questo è possibile ricordiamo che, essendo ν è un cardinale infinito, si ha $\nu = \nu \cdot \nu$ e quindi c'è una bigezione $\varphi : \nu \times \nu \to \nu$. Se prendiamo $A_\beta := \{\varphi(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \nu\}$, allora per l'iniettività di φ si ha $|A_\beta| = \nu$; inoltre $A_\beta \cap A_\gamma = \emptyset$ per $\beta \neq \gamma$; infine $\bigcup_{\alpha<\nu} A_\alpha = \mathrm{imm}(\varphi) = \nu$ per la suriettività di φ.

Adesso osserviamo che da $|A_\alpha| = \nu$ segue che $A_\alpha \subset \nu$ è illimitato (vedi Esercizio **??**). Di conseguenza, visto che la sequenza $(\kappa_\alpha \mid \alpha < \nu)$ è non-decrescente, si ha $\sup_{\alpha\in A_\beta} \kappa_\alpha = \sup_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha = \kappa$. Osserviamo anche che per ogni $\gamma \in A_\beta$, banalmente $\prod_{\alpha\in A_\beta} \kappa_\alpha \geq \kappa_\gamma$, e quindi $\prod_{\alpha\in A_\beta} \kappa_\alpha \geq \sup_{\gamma\in A_\beta} \kappa_\gamma = \kappa$. Infine, usando la proprietà associativa generalizzata, si ottiene la disuguaglianza voluta:

$$\prod_{\alpha<\nu} \kappa_\beta = \prod_{\beta<\nu} \left(\prod_{\alpha\in A_\beta} \kappa_\alpha\right) \geq \prod_{\beta<\nu} \kappa = \kappa^\nu.$$

□

NOTA BENE 4.10. Data una sequenza di cardinali $(\kappa_\alpha \mid \alpha < \nu)$ è sempre possibile riordinare gli elementi in modo da formare una sequenza non-decrescente. Si potrebbe pensare allora che, valendo la proprietà commutativa generalizzata per i prodotti infiniti, la richiesta di avere una successione non-decrescente possa sempre essere soddisfatta. Tuttavia non è così perché la sequenza "riordinata" potrebbe non essere più indicizzabile su un cardinale. Vediamo un semplice esempio per chiarire.

Sia $(\kappa_n \mid n \in \aleph_0)$ la sequenza dove $\kappa_{2n} = \aleph_n$ e $\kappa_{2n+1} = \aleph_{\omega+n}$ per ogni $n \in \omega$. Se riordiniamo la sequenza assegnata $\aleph_0, \aleph_\omega, \aleph_1, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_n, \aleph_{\omega+n}, \ldots$ in modo

[7] Vedremo più avanti che $(\aleph_\omega)^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.

crescente, otteniamo:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < \aleph_n < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \ldots < \aleph_{\omega+n} < \ldots.$$

Notiamo però che in questo caso avremmo $(\aleph_\alpha \mid \alpha < \omega + \omega)$, dove l'insieme degli indici non è un cardinale.

Come mostrano i seguenti due esercizi, entrambe le ipotesi nel Teorema di sopra sono necessarie.

Esercizio 4.11. Trovare una sequenza di cardinali $(\kappa_\alpha \mid \alpha < \nu)$ indicizzata su un cardinale tale che $\prod_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha < (\sup_{\alpha\in\nu} \kappa_\alpha)^\nu$.

Esercizio 4.12. Trovare una sequenza di cardinali $(\kappa_\alpha \mid \alpha < \beta)$ non-decrescente indicizzata su un ordinale β tale che $\prod_{\alpha<\beta} \kappa_\alpha < (\sup_{\alpha\in\nu} \kappa_\alpha)^\nu$.

Vale la seguente disuguaglianza (debole) tra somme infinite e prodotti infiniti.

Proposizione 4.13. *Sia $(\kappa_i \mid i \in I)$ una sequenza infinita di cardinali $\kappa_i \geq 2$. Allora $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$.*

Dim. Osserviamo che per ogni $j \in I$ si ha $\prod_{i\in I} \kappa_i \geq \kappa_j$. Infatti se prendiamo la sequenza $(\kappa'_i \mid i \in I)$ dove $\kappa'_j = \kappa_j$ e $\kappa'_i = 1$ per $j \neq i$, banalmente $\kappa'_i \leq \kappa_i$ per ogni $i \in I$, e allora $\prod_{i\in I} \kappa_i \geq \prod_{i\in I} \kappa'_i = \kappa_j$. Questo dimostra che $\prod_{i\in I} \kappa_i \geq \sup_{i\in I} \kappa_i$. Inoltre $\prod_{i\in I} \kappa_i \geq \prod_{i\in I} 2 = 2^{|I|} > |I|$. Possiamo così concludere che $\prod_{i\in I} \kappa_i \geq \max\{\sup_{i\in I} \kappa_i, |I|\} = \sum_{i\in I} \kappa_i$. $\square$

Concludiamo questa sezione con il Teorema di König, che è una forte generalizzazione del Teorema di Cantor: $\kappa < 2^\kappa$. Si tratta dell'unico risultato relativo a disuguaglianze strette tra cardinalità.

Teorema 4.14 (König). *Siano $(\mu_i \mid i \in I)$ e $(\kappa_i \mid i \in I)$ due sequenze infinite di cardinali dove $\mu_i < \kappa_i$ per ogni $i \in I$. Allora vale la disuguaglianza stretta:*

$$\sum_{i\in I} \mu_i \;<\; \prod_{i\in I} \kappa_i.$$

Dim. Prendiamo una famiglia $\{A_i \mid i \in I\}$ di insiemi a due a due disgiunti e tali che $|A_i| = \mu_i$ per ogni $i \in I$, in modo da avere $\sum_{i\in I} \mu_i = |\bigcup_{i\in I} A_i|$. Usando la Proposizione 4.13, otteniamo la disuguaglianza debole $\sum_{i\in I} \mu_i \leq \sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$, quindi basta vedere che non esistono funzioni suriettive $\varphi : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigtimes_{i\in I} \kappa_i$. Per ogni $j \in I$ denotiamo con $\varphi_j = \varphi|_{A_j} : A_j \to \bigtimes_{i\in I} \kappa_i$ la restrizione di φ all'insieme A_j; e denotiamo con $\pi_j : \bigtimes_{i\in I} \kappa_i \to \kappa_j$ la proiezione sulla j-esima componente.[8] Per l'ipotesi $|A_j| = \mu_j < \kappa_j$, la funzione $\pi_j \circ \varphi_j : A_j \to \kappa_j$ non può essere suriettiva, e quindi possiamo prendere un elemento $\xi_j \in \kappa_j$ tale che $\xi_j \notin \mathrm{imm}(\pi_j \circ \varphi_j)$. Osserviamo che $\vec{\xi} = (\xi_j \mid j \in I) \in \bigtimes_{i\in I} \kappa_i$ non appartiene all'immagine di φ, e quindi φ non è suriettiva. Infatti se per assurdo esistesse $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ con $\varphi(a) = \vec{\xi}$, allora prendendo $j \in I$ l'indice tale che $a \in A_j$, avremmo che $(\pi_j \circ \varphi_j)(a) = \xi_j$, contro il fatto che $\xi_j \notin \mathrm{imm}(\pi_j \circ \varphi_j)$. $\square$

Come caso particolare, ritroviamo il Teorema di Cantor.

Corollario 4.15. *Per ogni cardinale infinito κ si ha $2^\kappa > \kappa$.*

[8] Ricordiamo che, per definizione, $\bigtimes_{i\in I} \kappa_i := \{(x_i \mid i \in I) \mid x_i \in \kappa_i \text{ per ogni } i \in I\}$. Quindi la proiezione j-esima è la funzione $\pi_j(x_i \mid i \in I) = x_j$.

DIM. Consideriamo le due sequenze infinite $(1 \mid i \in \kappa)$ e $(2 \mid i \in \kappa)$ Per il teorema di König si ha che $\kappa = \sum_{i \in I} 1 < \prod_{i \in \kappa} 2 = 2^\kappa$. $\square$

5. Cofinalità, cardinali regolari e cardinali singolari

Un concetto cruciale nello studio dell'algebra cardinale è quello di cofinalità che, intuitivamente, misura quando "lungo" è un cardinale per lo studio delle cardinalità

DEFINIZIONE 5.1. Chiamiamo *cofinalità* di un insieme ordinato $(A, <)$ la più piccola cardinalità di un suo sottoinsieme illimitato:

$$\mathrm{cof}(A) \ = \ \min\{|X| \mid X \subseteq A \text{ illimitato}\}.$$

Possiamo pensare alla cardinalità di un insieme come una sorta di misura della sua "grandezza". Analogamente, possiamo pensare alla cofinalità di un insieme ordinato come ad una misura della sua "lunghezza".

Banalmente, $\mathrm{cof}(A) \leq |A|$, ma ci sono casi in cui vale la disuguaglianza stretta. Osserviamo inoltre che se $(A, <)$ ha massimo, allora $\mathrm{cof}(A) = 1$; e se A non ha massimo allora $\mathrm{cof}(A) \geq \aleph_0$.

ESEMPIO 5.2. Come sappiamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ha cardinalità più che numerabile. Tuttavia la cofinalità $\mathrm{cof}(\mathbb{R}) = \aleph_0$ è numerabile, perché $\mathbb{R}$ non ha massimo, e $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme illimitato.

ESEMPIO 5.3. Se un insieme $A \subseteq \omega_1$ è numerabile, allora $\sup A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ è un ordinale numerabile, in quanto è unione numerabile di insiemi al più numerabili.[9] Quindi $\sup A < \omega_1$, cioè A è limitato. Concludiamo allora che $\mathrm{cof}(\omega_1) = \aleph_1$.

ESEMPIO 5.4. Per ogni ordinale α, la cofinalità $\mathrm{cof}(\alpha + \omega) = \aleph_0$. Infatti $\alpha + \omega$ non ha massimo, e l'insieme numerabile $A = \{\alpha + n \mid n \in \omega\}$ è illimitato in $\alpha + \omega$.

ESERCIZIO 5.5. Per ogni insieme ordinato A, si ha $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(A)) = \mathrm{cof}(A)$.

ESERCIZIO 5.6. Per ogni ordinale $\alpha > 1$ e per ogni ordinale limite λ, si ha:

$$\mathrm{cof}(\alpha + \lambda) = \mathrm{cof}(\alpha \cdot \lambda) = \mathrm{cof}(\alpha^\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda).$$

Il prossimo risultato ci mostra che nella definizione di cofinalità, potevamo equivalentemente considerare funzioni illimitate o funzioni illimitate crescenti definite su ordinali.

PROPOSIZIONE 5.7.

(1) *cof*$(A) = \min\{\alpha$ *ordinale* $\mid \exists f : \alpha \to A$ *funzione illimitata*$\}$.
(2) *cof*$(A) = \min\{\alpha$ *ordinale* $\mid \exists f : \alpha \to A$ *funzione illimitata crescente*$\}$.

DIM. Denotiamo con

- $\mathrm{cof}_1(A) = \min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists f : \alpha \to A \text{ funzione illimitata}\}$;
- $\mathrm{cof}_2(A) = \min\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists f : \alpha \to A \text{ funzione illimitata crescente}\}$.

---

[9] Ricordiamo che per definizione della funzione di Hartogs, gli ordinali in $\omega_1 = \mathbb{H}(\omega)$ sono al più numerabili.

Se $f : \alpha \to A$ è una funzione illimitata, allora $X = \mathrm{imm}(f)$ è un sottoinsieme illimitato di A avente cardinalità $|X| \leq |\alpha| \leq \alpha$, e dunque $\mathrm{cof}(A) \leq \mathrm{cof}_1(A)$. La disuguaglianza $\mathrm{cof}_1(A) \leq \mathrm{cof}_2(A)$ vale banalmente perché le funzioni illimitate crescenti sono un sottoinsieme delle funzioni illimitate. Resta da vedere che $\mathrm{cof}_2(A) \leq \mathrm{cof}(A)$.

Intanto possiamo supporre che A non abbia massimo, altrimenti la tesi è banale. Sia $\kappa = \mathrm{cof}(A)$, e sia $X \subseteq A$ un insieme illimitato di cardinalità κ. Possiamo allora enumerare $X = \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Per ricorsione transfinita, definiamo una funzione $f : \kappa \to A$ in questo modo. Alla base induttiva poniamo $f(0) = \sigma(0)$. Per $\beta > 0$, osserviamo che l'insieme $Y_\beta = \{f(\delta) \mid \delta < \beta\} \cup \{x_\beta\}$ è limitato in A. Infatti $|Y_\beta| \leq |\beta| + 1 < \kappa$, e κ è la minima cardinalità di un insieme illimitato. Esistono allora elementi di X più grandi di ogni elemento di Y_β, e quindi possiamo definire $f(\beta) = x_\gamma$ dove γ è il minimo ordinale tale $x_\gamma > Y_\beta$ (cioè $x_\gamma > y$ per ogni $y \in Y_\beta$). Segue direttamente dalla definizione che f è strettamente crescente. Inoltre f è illimitata perché $f(\beta) \geq x_\beta$ per ogni β. Concludiamo che $\mathrm{cof}_2(A) \leq \kappa = \mathrm{cof}(A)$, e la tesi è raggiunta. $\square$

Definizione 5.8. Un cardinale κ si dice *regolare* se $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, cioè se non ha sottoinsiemi illimitati aventi cardinalità più piccola. Un cardinale si dice *singolare* se non è regolare.

Chiaramente ogni cardinale finito n è regolare. Notiamo che anche $\aleph_0$ è un cardinale regolare.

Esempio 5.9. $\aleph_1$ è un cardinale regolare. Infatti, come abbiamo osservato nell'Esempio 5.4, si ha che $\mathrm{cof}(\omega_1) = \aleph_1$.

Esempio 5.10. $\aleph_\omega$ è un cardinale singolare perchè $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \aleph_0 < \aleph_\omega$. Infatti, l'insieme numerabile $A = \{\aleph_n \mid n \in \omega\}$ è illimitato in $\aleph_\omega$.

Esercizio 5.11. Sia κ un cardinale regolare, e sia $(\xi_\alpha \mid \alpha \in \kappa)$ una sequenza crescente di ordinali. Se $\xi = \sup_{\alpha \in \kappa} \xi_\alpha$ allora $\mathrm{cof}(\xi) = \kappa$.

L'esempio di $\aleph_1$ cardinale regolare si generalizza a tutti i cardinali successori.

Proposizione 5.12. *Ogni cardinale successore è regolare.*

Dim. Sia $A \subseteq \aleph_{\alpha+1}$ un sottoinsieme illimitato. Questo significa che $\aleph_{\alpha+1} = \sup A = \bigcup_{\beta \in A} \beta$. Notiamo che ogni elemento $\beta \in A$ appartiene al cardinale $\aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha)$, dunque la sua cardinalità $|\beta| \leq \aleph_\alpha$. Abbiamo:

$$\aleph_{\alpha+1} = \Big| \bigcup_{\beta \in A} \beta \Big| \leq \sum_{\beta \in A} |\beta| \ = \ \max \left\{ \sup_{\beta \in A} |\beta|; |A| \right\} \ = \ \max\{\aleph_\alpha; |A|\}.$$

Ma allora deve necessariamente essere $|A| = \aleph_{\alpha+1}$, cioè la tesi. $\square$

Sorge spontaneo chiedersi se valga anche l'implicazione inversa, cioè se ogni cardinale regolare $> \aleph_0$ sia necessariamente un successore. La risposta è tutt'altro che semplice. Da un lato è consistente con ZFC che non esistano cardinali limite regolari; dall'altro l'esistenza di tali cardinali non solo non è dimostrabile con gli assiomi di ZFC, ma non è neppure possibile dimostrare che è consistente (a meno che ZFC sia contraddittorio!). Torneremo più avanti su questo tipo di considerazioni.

Riguardo i cardinali limite, vale la seguente proprietà:

Proposizione 5.13. *Se λ è un ordinale limite, allora $cof(\aleph_\lambda) = cof(\lambda)$ e $cof(\beth_\lambda) = cof(\lambda)$.*

Dim. Visto che λ è un ordinale limite, $\aleph_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma$. Sia ora $X \subseteq \lambda$ un sottoinsieme illimitato dove $|X| = \mathrm{cof}(\lambda)$. Notiamo che l'insieme $Y := \{\aleph_\xi \mid \xi \in X\}$ è illimitato in $\aleph_\lambda$, e quindi $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) \leq |Y| = |X| = \mathrm{cof}(\lambda)$. Infatti, se $\beta \in \aleph_\lambda$ allora esiste $\gamma < \lambda$ tale che $\beta \in \aleph_\gamma$; visto che X è illimitato possiamo prendere $\xi \in X$ con $\xi \geq \gamma$, e quindi $\aleph_\xi \in Y$ è tale che $\aleph_\xi \geq \aleph_\gamma > \beta$.

Viceversa, sia $Y \subseteq \aleph_\lambda$ è un sottoinsieme illimitato dove $|Y| = \mathrm{cof}(\aleph_\lambda)$, e consideriamo l'insieme $X := \{\xi_y \mid y \in Y\}$ dove $\xi_y := \min\{\beta \in \lambda \mid \aleph_\beta > y\}$. Notiamo che X è illimitato in λ. Infatti se $\gamma < \lambda$, prendo $y \in Y$ tale che $\aleph_\gamma < y$, e allora da $\aleph_{\xi_y} > y$ segue che $\xi_y > \gamma$. Abbiamo allora:

$$\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = |Y| \geq |X| \geq \mathrm{cof}(\lambda).$$

La dimostrazione per la la sequenza dei beth è del tutto simile. □

Un'altra utile caratterizzazione della cofinalità è la seguente:

Esercizio 5.14. Per ogni cardinale infinito ν regolare, esiste un punto fisso $\kappa = \aleph_\kappa$ di cofinalità ν. La stessa proprietà vale per la sequenza dei beth.

Proposizione 5.15. *Sia κ un cardinale. Allora $cof(\kappa)$ è il più piccolo cardinale ν tale che esiste una sequenza $(\kappa_i \mid i \in \nu)$ di cardinali $\kappa_i < \kappa$ con $\sum_{i\in\nu} \kappa_i = \kappa$.*

Dim. Sia $\nu = \mathrm{cof}(\kappa)$, e sia $f : \nu \to \kappa$ una funzione illimitata. Consideriamo la sequenza di cardinali $(\kappa_i \mid i \in \nu)$ dove $\kappa_i = |f(i)| < \kappa$. Se κ è singolare, allora κ è limite, e in questo caso

$$\sup_{i\in\nu} \kappa_i = \sup_{i\in\nu} |f(i)| \;=\; \sup\{\mu \text{ cardinale} \mid \mu < \kappa\} \;=\; \kappa.$$

Se invece κ è regolare, allora $\nu = \kappa$. In entrambi i casi, si ha che

$$\sum_{i\in\nu} \kappa_i = \max\left\{\sup_{i\in\nu} \kappa_i, \nu\right\} = \max\left\{\sup_{i\in\nu} |f(i)|, \nu\right\} \;=\; \kappa.$$

Infine, notiamo che $\mathrm{cof}(\kappa)$ è il più piccolo cardinale con quella proprietà. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una sequenza di cardinali $(\kappa_i \mid i \in \mu)$ tale che $\kappa = \sum_{i\in\mu} \kappa_i = \max\{\sup_{i\in\mu} \kappa_i, \mu\}$, dove $\mu < \mathrm{cof}(\kappa)$ e dove $\kappa_i < \kappa$. Allora dovremmo avere $\sup_{i\in\kappa} \kappa_i = \kappa$; quindi $\{\kappa_i \mid i \in \mu\}$ sarebbe illimitato in κ, e allora $\mu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$, una contraddizione. □

Esercizio 5.16. Se κ è un cardinale limite e $\mathrm{cof}(\kappa) = \nu$, allora esiste una successione crescente di cardinali $(\kappa_i \mid i \in \nu)$ dove ogni $\kappa_i < \kappa$ è un successore e dove $\kappa = \sup_{i\in\nu} \kappa_i$. In particolare, $\kappa = \sum_{i\in\nu} \kappa_i$.

Esercizio 5.17. Se κ è un limite forte, allora $\kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} = 2^\kappa$.

6. Cofinalità ed esponenziazioni

In questa sezione vedremo come usando la nozione di cofinalità, sia possibile stabilire alcune importanti proprietà relative alle esponenziazioni di cardinali.

Cominciamo con due utili risultati relativi alla cofinalità delle esponenziazioni. Si tratta di due disuguaglianze strette, che seguono dal teorema di König.

Teorema 6.1. *Per ogni cardinale infinito κ si ha:*

(1) $\kappa^{cof(\kappa)} > \kappa$.

(2) $cof(\mu^\kappa) > \kappa$ *per ogni* $\mu \geq 2$.

Dim. (1). Siano $\kappa_i < \kappa$ cardinali tali che $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$. Allora applicando la disuguaglianza di König si ottiene:

$$\kappa \; = \; \sum_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i \; < \; \prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa \; = \; \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}.$$

(2). Supponiamo per assurdo che $\nu := \mathrm{cof}(\mu^\kappa) \leq \kappa$. Visto che $\mu \geq 2$, il cardinale μ^κ è infinito e possiamo applicare il punto precedente, ottenendo una contraddizione:

$$\mu^\kappa \; < \; (\mu^\kappa)^\nu \; \leq \; (\mu^\kappa)^\kappa \; = \; \mu^{\kappa\cdot\kappa} \; = \; \mu^\kappa.$$

□

Gli assiomi di ZFC non permettono di stabilire il valore del continuo. Tuttavia è possibile dare la seguente restrizione, che in realtà è l'unica possibile.[10]

Corollario 6.2. *Per ogni ordinale limite λ di cofinalità numerabile si ha $\mathfrak{c} \neq \aleph_\lambda$. In particolare $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$.*

Dim. Notiamo che $\mathrm{cof}(\mathfrak{c}) = \mathrm{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$, mentre $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda) = \aleph_0$. □

Ragionare in termini di cofinalità è cruciale per la dimostrazione del seguente classico resultato, in base al quale è possibile ricondurre le esponenziazioni con base un cardinale successore ad esponenziazioni con base un cardinale limite.[11]

Teorema 6.3 (Hausdorff). *Siano κ e ν cardinali infiniti. Allora* $(\kappa^+)^\nu = \max\{\kappa^\nu, \kappa^+\}$.

Dim. Se $\kappa^+ \leq \nu$, cioè quando la base è "piccola" rispetto all'esponente, allora per quanto già visto nella Proposizione 1.16, si ha $\kappa^\nu = (\kappa^+)^\nu = 2^\nu > \nu \geq \kappa^+$, da cui la tesi $(\kappa^+)^\nu = \max\{\kappa^\nu, \kappa^+\} = 2^\nu$.

Supponiamo ora $\nu < \kappa^+$. Visto che κ^+ è regolare in quanto cardinale successore, ogni funzione $f : \nu \to \kappa^+$ ha immagine limitata, e dunque esiste un ordinale $\gamma < \kappa^+$ tale che $\mathrm{imm}(f) \subseteq \gamma$; in altre parole, $f \in \mathrm{Fun}(\nu, \gamma)$ per un opportuno $\gamma < \kappa^+$. Abbiamo quindi:

$$\mathrm{Fun}(\nu, \kappa^+) \; = \; \bigcup_{\gamma<\kappa^+} \mathrm{Fun}(\nu, \gamma).$$

Ricordiamo che se $\gamma < \kappa^+$, allora $|\gamma| \leq \kappa$ e quindi $|\mathrm{Fun}(\nu, \gamma)| = |\gamma|^\nu \leq \kappa^\nu$. Valgono le disuguaglianze:

$$(\kappa^+)^\nu \; = \; |\mathrm{Fun}(\nu, \kappa^+)| = \left| \bigcup_{\gamma<\kappa^+} \mathrm{Fun}(\nu, \gamma) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma<\kappa^+} |\mathrm{Fun}(\kappa, \gamma)| \leq \sum_{\gamma<\kappa^+} \kappa^\nu \; = \; \max\{\kappa^\nu, \kappa^+\}.$$

L'altra disuguaglianza $\max\{\kappa^\nu, \kappa^+\} \leq (\kappa^+)^\nu$ è immediata. □

---

[10] Per ogni cardinale κ con $\mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0$, è consistente avere $\mathfrak{c} = \kappa$ (cioè esistono modelli di ZFC dove $\mathfrak{c} = \kappa$).

[11] Ricordiamo che se $\kappa = \aleph_\alpha$ è un cardinale infinito, si denota con $\kappa^+ = \aleph_{\alpha+1}$ il suo successore.

Ricordiamo che ogni ordinale $\alpha > 0$ si può scrivere nella forma $\alpha = \lambda + n$ dove n è un naturale positivo, e dove $\lambda = 0$ oppure λ è un ordinale limite.[12] Iterando un numero finito di volte il Teorema di Hausdorff, si ottiene la seguente formula che si applica a tutti cardinali successori:

Corollario 6.4. *Per ogni ordinale λ e per ogni naturale $n \in \omega$ si ha* $(\aleph_{\lambda+n})^{\aleph_\beta} = \max\{(\aleph_\lambda)^{\aleph_\beta}, \aleph_{\lambda+n}\}$.

Dim. Per induzione su $n \in \omega$. Quando $n = 0$ la tesi è banale. Nel caso successore $n+1$ basta applicare prima il Teorema di Hausdorff e poi l'ipotesi induttiva:

$$(\aleph_{\lambda+n+1})^{\aleph_\beta} = \max\{(\aleph_{\lambda+n})^{\aleph_\beta}, \aleph_{\alpha+n+1}\} = \max\left\{\max\{(\aleph_\lambda)^{\aleph_\beta}, \aleph_{\lambda+n}\}, \aleph_{\lambda+n+1}\right\} = \max\{(\aleph_\lambda)^{\aleph_\beta}, \aleph_{\lambda+n+1}\}.$$

□

Ad esempio:

- $(\aleph_{17})^{\aleph_{11}} = \max\{(\aleph_0)^{\aleph_{11}}, \aleph_{17}\} = \max\{2^{\aleph_{11}}, \aleph_{17}\}$.
- $(\aleph_{\omega+13})^{\aleph_\omega} = \max\{(\aleph_\omega)^{\aleph_\omega}, \aleph_{\omega+13}\} = \max\{2^{\aleph_\omega}, \aleph_{\omega+13}\}$.

Occupiamoci ora di esponenziazioni con esponente un cardinale limite.

Notazione 6.5. Se ν è un cardinale infinito, per ogni $\kappa \geq 2$ è consuetudine denotare

$$\kappa^{<\nu} := \sup\{\kappa^\xi \mid \xi < \nu\}.$$

Teorema 6.6. *Sia ν un cardinale limite e sia $\kappa \geq 2$. Allora*

$$\kappa^\nu = (\kappa^{<\nu})^{cof(\nu)}.$$

Dim. Scriviamo $\nu = \sum_{i \in \mathrm{cof}(\nu)} \nu_i$ dove $(\nu_i \mid i \in \mathrm{cof}(\nu))$ è una sequenza crescente di cardinali $\nu_i < \nu$. Usando la formula per i prodotti infiniti, si ottengono le uguaglianze:

$$\kappa^\nu = \kappa^{\sum_{i \in \mathrm{cof}(\nu)} \nu_i} = \prod_{i \in \mathrm{cof}(\nu)} \kappa^{\nu_i} = \left(\sup_{i \in \mathrm{cof}(\nu)} \kappa^{\nu_i}\right)^{\mathrm{cof}(\nu)} = (\kappa^\nu)^{\mathrm{cof}(\nu)}.$$

□

Esempio 6.7. Se $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ per ogni $n \in \omega$, allora $2^{\aleph_\omega} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$. Infatti, sotto questa ipotesi, $2^{<\aleph_\omega} = \aleph_\omega$.

Esercizio 6.8. Siano κ, ν cardinali infiniti. Se ν è singolare, e se la sequenza $(\kappa^\xi \mid \xi < \nu)$ è definitivamente costante, allora $\kappa^\nu = \kappa^{<\nu}$.

Riguardo le esponenziazioni che hanno come base un cardinale limite, vale il seguente risultato:

Teorema 6.9. *Sia κ un cardinale limite, e ν un cardinale infinito. Si ha:*

(1) $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$ *se* $\nu < cof(\kappa)$.
(2) $\kappa^\nu = \left(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu\right)^{cof(\kappa)}$ *se* $\nu \geq cof(\kappa)$.

[12] Vedi Esercizio ??.

Dim. (1). Come già osservato nella dimostrazione del Teorema di Hausdorff, se $\nu < \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\mathrm{Fun}(\nu,\kappa) = \bigcup_{\gamma<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu,\gamma)$, visto che ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è limitata. Si ha allora:

$$\kappa^\nu = |\mathrm{Fun}(\nu,\kappa)| = \left|\bigcup_{\gamma<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu,\gamma)\right| \leq \sum_{\gamma<\kappa} |\mathrm{Fun}(\nu,\gamma)| =$$

$$= \sum_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\nu = \max\left\{\sup_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\nu, \kappa\right\} = \max\left\{\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu, \kappa\right\} = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu.$$

dove abbiamo denotato con $\gamma < \kappa$ gli ordinali minori di κ, e con $\mu < \kappa$ i cardinali minori di κ. Sopra abbiamo usato la disuguaglianza $\kappa \leq \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$, che vale perchè κ è limite. Infatti, per ogni $\mu < \kappa$ si ha banalmente $\mu \leq \mu^\nu$, e quindi $\kappa = \sup_{\mu<\kappa} \mu \leq \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$.

(2). Visto che κ è un cardinale limite, possiamo scrivere $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$ dove $(\kappa_i \mid i \in \mathrm{cof}(\kappa))$ è una sequenza crescente di cardinali $\kappa_i < \kappa$. In particolare $\kappa = \sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$. Notando che $\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i \leq \prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$ e applicando la formula del prodotto infinito, otteniamo:

$$\kappa^\nu = \left(\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i\right)^\nu = \left(\left(\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)}\right)^\nu = \left(\prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i\right)^\nu =$$

$$= \prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} {\kappa_i}^\nu = \left(\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} {\kappa_i}^\nu\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)} = \left(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)}.$$

Sopra abbiamo potuto applicare la formula sui prodotti infiniti anche alla sequenza $({\kappa_i}^\nu \mid i \in \mathrm{cof}(\kappa))$, perché è non-decrescente. Inoltre, visto che $(\kappa_i \mid i \in \mathrm{cof}(\kappa))$ è illimitata in κ, è chiaro che $\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} {\kappa_i}^\nu = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$. □

Esercizio 6.10. Assumiamo l'ipotesi del continuo. Mostrare che esistono cardinali infiniti κ, ν tali che $\kappa > \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$.

Come diretta conseguenza del teorema precedente, ricaviamo:

Teorema 6.11. *Siano κ e ν cardinali infiniti.*

(1) *Se $\mu^\nu < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$ e se $\nu < cof(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \kappa$.*
(2) *Se $\mu^\nu < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$ e se $\nu \geq cof(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \kappa^{cof(\kappa)}$.*

Dim. (1). Se κ è limite, per la (1) del Teorema 6.9 si ha $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\nu} \mu^\nu \leq \kappa \leq \kappa^\nu$. Se $\kappa = \theta^+$ è successore, allora $\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu = \theta^\nu < \theta^+$, e per il teorema di Hausdorff si ha $\kappa^\nu = (\theta^+)^\nu = \max\{\theta^\nu, \theta^+\} = \theta^+ = \kappa$.

(2). Con le nostre ipotesi abbiamo che $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \nu < 2^\nu < \kappa$, dunque κ è singolare ed è quindi un cardinale limite. Possiamo allora applicare la (2) del Teorema 6.9 ed ottenere:

$$\kappa^\nu \ = \ \left(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)} \ \leq \ \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} \ \leq \ \kappa^\nu.$$

□

Esercizio 6.12. Dimostrare che $(\aleph_\omega)^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \cdot (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

7. Cardinali inaccessibili

Abbiamo visto che ogni cardinale successore è regolare. La validità dell'implicazione inversa è un problema molto delicato; faremo qualche riflessione a proposito alla fine di questa sezione.

Definizione 7.1. Un cardinale κ si dice *debolmente inaccessibile* se è un cardinale limite regolare. Un cardinale κ si dice *fortemente inaccessibile* (o semplicemente *inaccessibile*) se è un cardinale limite forte regolare.

Visto che ogni cardinale limite forte è un cardinale limite, banalmente ogni cardinale fortemente inaccessibile è debolmente inaccessibile.

Ricordiamo che se vale l'ipotesi generalizzata del continuo GCH le nozioni di limite e di limite forte coincidono, e quindi in quel caso anche le nozioni di debolmente e di fortemente inaccessibile coincidono.

Esempio 7.2. $\aleph_0$ è fortemente inaccessibile.

L'aggettivo "inaccessibile" è dovuto alla proprietà che non è "raggiungibile" dal basso mediante esponenziazioni, somme o prodotti anche infiniti.

Esercizio 7.3. Un cardinale κ è fortemente inaccessibile se e solo se soddisfa le seguenti tre proprietà:

(1) Se $\mu, \nu < \kappa$ allora $\mu^\nu < \kappa$.
(2) Se $(\kappa_i \mid i \in I)$ è una sequenza infinita di cardinali dove $|I| < \kappa$ e $\kappa_i < \kappa$ per ogni $i \in I$, allora $\sum_{i\in I} \kappa_i < \kappa$.
(3) Se $(\kappa_i \mid i \in I)$ è una sequenza infinita di cardinali dove $|I| < \kappa$ e $\kappa_i < \kappa$ per ogni $i \in I$, allora $\prod_{i\in I} \kappa_i < \kappa$.

Teorema 7.4. *Sia $\kappa > \aleph_0$ un cardinale regolare. Allora:*

(1) *κ è debolmente inaccessibile se e solo se è un punto fisso della funzione-classe aleph: $\kappa = \aleph_\kappa$.*
(2) *κ è fortemente inaccessibile se e solo se è un punto fisso della funzione-classe beth: $\kappa = \beth_\kappa$.*

Dim. (1). Se κ è inaccessibile, allora $\kappa = \aleph_\lambda$ dove λ è limite perché è un cardinale limite, ed inoltre $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \aleph_\lambda$ perché è regolare. Abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$\aleph_\lambda = \mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda) \leq |\lambda| \leq \lambda \leq \aleph_\lambda.$$

Quindi $\kappa = \aleph_\lambda = \lambda$, e dunque $\kappa = \aleph_\kappa$. Viceversa, se $\kappa = \aleph_\kappa$ è un punto fisso regolare della funzione-classe aleph, allora κ è un cardinale limite perché è un aleph con indice un ordinale limite, cioè κ.

(2). Procediamo in modo del tutto analogo a quanto fatto per la dimostrazione del punto (1). Se κ è fortemente inaccessibile, allora $\kappa = \beth_\lambda$ con λ limite perché è un limite forte, ed inoltre $\mathrm{cof}(\beth_\lambda) = \beth_\lambda$ perché è regolare. Abbiamo allora la seguente catena di disuguaglianze:

$$\beth_\lambda = \mathrm{cof}(\beth_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda) \leq |\lambda| \leq \lambda \leq \beth_\lambda.$$

Quindi $\kappa = \beth_\lambda = \lambda$, e dunque $\kappa = \beth_\kappa$. Viceversa, se $\kappa = \beth_\kappa$ è un punto fisso regolare della funzione-classe beth, allora κ è un limite forte perché è un punto limite della funzione beth. $\square$