ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
Dispensa 8

Mauro Di Nasso

Ultimo aggiornamento: December 9, 2024

I cardinali

1. Il primo ordinale non numerabile: ω_1.

Notiamo che gli esempi espliciti di ordinali che abbiamo considerato fin qui sono tutti al più numerabili. Ad esempio tutti gli ordinali $\omega + n$ con $n \in \omega$ sono chiaramente numerabili; l'ordinale $\omega + \omega$ è numerabile, perché isomorfo all'insieme bene ordinato $\omega \boldsymbol{+} \omega$ che è ottenuto ordinando opportunamente l'unione disgiunta $\omega \sqcup \omega = \omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$ (vedi Definizione **??**); l'ordinale $\omega \cdot \omega$ è numerabile, perché è isomorfo all'insieme bene ordinato $\omega \boldsymbol{\times} \omega$ che è ottenuto ordinando opportunamente il prodotto cartesiano $\omega \times \omega$ (vedi Definizione **??**); l'ordinale ω^ω è numerabile perché è isomorfo all'insieme bene ordinato $\mathrm{EXP}(\omega, \omega)$ che è ottenuto ordinando l'insieme numerabile delle funzioni a supporto finito $\{f : \omega \to \omega \mid \{n \in \omega \mid f(n) \neq 0\} \text{ finito}\}$ (vedi Definizione **??**); e così via.

Per ottenere il primo esempio canonico di ordinale non numerabile l'idea è semplice: prendiamo la collezione di tutti gli ordinali al più numerabili. Dovremo però verificare che una tale collezione è in effetti un insieme.

Definizione 1.1. $\omega_1 = \{\alpha \text{ ordinale} \mid |\alpha| \leq |\omega|\}$.

Gli assiomi della nostra teoria ci garantiscono la seguente proprietà fondamentale di ω_1. Osserviamo che la sua dimostrazione non richiede l'assioma di scelta.

Proposizione 1.2 (ZF). *ω_1 è il più piccolo degli ordinali non numerabili.*

Dim. Come prima cosa dobbiamo verificare che ω_1 è in effetti un insieme, e non una classe propria. A questo scopo consideriamo la seguente classe:

$$\Gamma(\omega) := \{(A, \prec) \text{ buon ordine} \mid A \subseteq \omega\}.$$

Osserviamo che ogni elemento $(A, \prec) \in \Gamma(\omega)$ è una coppia ordinata dove $A \subseteq \omega$, e dove l'insieme di coppie dato dalla relazione d'ordine $\prec$ è un sottoinsieme di $\omega \times \omega$. Dunque $\Gamma(\omega) \subseteq \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega \times \omega)$ è una sottoclasse di un insieme, e quindi è un insieme per l'assioma di separazione.

Sia adesso $\mathbf{F}$ una funzione-classe che associa ad ogni insieme bene ordinato $(A, \prec)$ quell'unico ordinale α tale che $(A, \prec) \cong (\alpha, \in)$. Visto che $\Gamma(\omega)$ è un insieme, per l'assioma di rimpiazzamento anche

$$\mathbf{F}[\Gamma(\omega)] = \{\mathbf{F}(A, \prec) \mid (A, \prec) \in \mathbb{H}(\omega)\}$$

è un insieme. Verifichiamo che $\mathbf{F}[\Gamma(\omega)] = \omega_1$.

Un'inclusione è ovvia perchè se un ordinale α è isomorfo ad un buon ordine $(A, \prec) \in \Gamma(\omega)$, allora $|\alpha| = |A| \leq |\omega|$. Viceversa, se $|\alpha| \leq |\omega|$, allora possiamo prendere una funzione iniettiva $f : \alpha \to \omega$. Sull'insieme immagine $A := \mathrm{Imm}(f)$ definiamo una relazione d'ordine $\prec$ ponendo $f(\beta) \prec f(\gamma) \Leftrightarrow \beta \in \gamma$. Osserviamo che la definizione è ben posta perché f è iniettiva. È immediato dalla definizione di $\prec$ che $f : (\alpha, \in) \cong (A, \prec)$ è un isomorfismo d'ordine. Quindi, visto che $A \subseteq \omega$, si ha $(A, \prec) \in \Gamma(\omega)$ e che $\mathbf{F}(A, \prec) = \alpha$.

Per mostrare che ω_1 è un ordinale basta osservare che si tratta di un insieme di ordinali che è transitivo. Questo si verifica facilmente: se $\beta \in \alpha \in \omega_1$, allora $\beta \subset \alpha$

dove $|\alpha| \leq |\omega|$, quindi anche $|\beta| \leq |\omega|$ e perciò $\beta \in \omega_1$. Osserviamo che ω_1 non è numerabile, altrimenti avremmo che $\omega_1 \in \omega_1$, una contraddizione.

Infine, se γ è un ordinale non numerabile, allora per ogni ordinale al più numerabile α non è possibile che $\gamma \subseteq \alpha$; quindi, per la tricotomia degli ordinali, deve essere $\alpha \in \gamma$. Questo significa che $\omega_1 \subseteq \gamma$, e quindi ω_1 ha la proprietà di minimalità voluta. □

2. Cardinali come ordinali iniziali

Percorrendo la retta transfinita degli ordinali, si incontrano degli speciali ordinali quando avviene un "cambio" di cardinalità. Ad esempio, percorrendo tutti gli ordinali a partire da ω, il primo ordinale in cui si ha un cambio di cardinalità è ω_1.

Definizione 2.1. Un *cardinale* è un *ordinale iniziale*, cioè un ordinale κ con la proprietà che per ogni $\alpha < \kappa$ si ha $|\alpha| \neq |\kappa|$ (e quindi $|\alpha| < |\kappa|$).

Osserviamo che tutti i naturali $n \in \omega$ sono cardinali, perchè se $n < m$ non esistono bigezioni tra n ed m. Anche ω è un cardinale, perché è il più piccolo degli ordinali infiniti (se $n < \omega$, chiaramente n non è in bigezione con ω). Come abbiamo osservato sopra, il primo cardinale più grande di ω è ω_1.

Esercizio 2.2. Se κ e ν sono cardinali, allora $|\kappa| \leq |\nu| \Leftrightarrow \kappa \leq \nu$.

Proposizione 2.3. *Ogni cardinale infinito è un ordinale limite.*

Dim. Un ordinale successore infinito $\alpha + 1$ non è un ordinale iniziale perché $|\alpha| = |\alpha + 1|$. Infatti, se $\alpha + 1$ è infinito allora $\omega \subseteq \alpha$, ed è immediato vedere che esiste una bigezione $f : \alpha + 1 \to \alpha$. Ad esempio si può definire $f(n) = n + 1$ se $n \in \omega$, e $f(\beta) = \beta$ se $\omega \leq \beta < \alpha$, e $f(\alpha) = 0$. □

Osserviamo che non vale l'implicazione inversa nella proposizione precedente. Ad esempio, $\omega + \omega$ è un ordinale limite, ma non è un ordinale iniziale perchè $\omega < \omega + \omega$ e $|\omega| = |\omega + \omega|$.

Proposizione 2.4. *Ogni ordinale è in bigezione con un unico cardinale.*

Dim. Dato un ordinale α, prendiamo κ il minimo ordinale tale che $|\kappa| = |\alpha|$. Un tale κ è un cardinale per minimalità; infatti se $\beta < \gamma$ allora $|\beta| \neq |\alpha|$. Infine, non possono esistere due cardinali diversi $\kappa < \kappa'$ entrambi equipotenti ad α, altrimenti si avrebbe che $|\kappa| = |\kappa'|$, contro la definizione di ordinale iniziale. □

Come vedremo nella prossima sezione, gli ordinali iniziali saranno presi come rappresentanti canonici nelle classi di equipotenza.

Ricordiamo che l'unione di ordinali corrispondeva all'estremo superiore e l'intersezione di ordinale corrispondeva al minimo. La stessa proprietà vale anche per i cardinali.

Proposizione 2.5. *Sia $\mathcal{K}$ un insieme non vuoto di cardinali. Allora:*

- *L'unione $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}} \kappa = \sup \mathcal{K}$ è un cardinale;*
- *L'intersezione $\bigcap \mathcal{K} = \bigcap_{\kappa \in \mathcal{K}} \kappa = \min \mathcal{K}$ è un cardinale.*

Dim. Per esercizio. □

3. La funzione-classe di Hartogs

Facciamo presente che in ZF (senza assioma di scelta) non è possibile trovare una buona definizione di cardinale come rappresentante canonico in ogni classe di equipotenza. Precisamente vale il seguente risultato, che enunciamo in modo "informale".[1] Non lo dimostriamo perchè richiede tecniche che vanno al di là degli scopi di questo corso.

TEOREMA 3.1. *(Pincus 1974). In ZF non esiste alcuna funzione-classe* $\mathbf{F}$ *definita per tutti gli insiemi che soddisfi le seguenti due proprietà:*

(*i*) $|\mathbf{F}(A)| = |A|$;

(*ii*) $\mathbf{F}(A) = \mathbf{F}(B) \Leftrightarrow |A| = |B|$.

Esistono invece rappresentanti canonici nelle classi di equipotenza degli insiemi *bene ordinabili*, cioè di quegli insiemi A per i quali esiste una relazione di buon ordine $\prec$ su A.

DEFINIZIONE 3.2. Per ogni insieme bene ordinabile A, la *cardinalità* di A è l'unico cardinale κ equipotente ad A. In questo caso scriviamo:

$$\kappa = |A|.$$

Si osservi infatti che se $\prec$ è un buon ordinamento su A, allora si prende l'unico ordinale α isomorfo ad $(A, \prec)$, ed infine l'unico cardinale κ equipotente ad α.

Grazie all'assioma di scelta, vedremo che ogni insieme è bene ordinabile, e quindi ad ogni insieme corrisponderà il suo cardinale.[2]

TEOREMA 3.3 (Zermelo). *Ogni insieme è bene ordinabile.*

Generalizziamo adesso la costruzione usata per la definizione di ω_1.

DEFINIZIONE 3.4. Per ogni insieme A, sia

$$\mathbb{H}(A) = \{\alpha \text{ ordinale} \mid |\alpha| \leq |A|\}$$

il suo *numero di Hartogs*.

La seguente fondamentale proprietà dei numeri di Hartogs è dimostrabile senza alcun uso dell'assioma di scelta. È importante evidenziare questo fatto perché la useremo più avanti per dimostrare alcune equivalenze dell'assioma di scelta.

TEOREMA 3.5 (ZF). *(Hartogs 1915)* $\mathbb{H}(A)$ *è un cardinale, ed è il più piccolo ordinale tale che* $|\mathbb{H}(A)| \not\leq |A|$.

DIM. Come prima cosa verifichiamo che la classe $\mathbb{H}(A)$ è un insieme.

Sia $\mathbf{F}$ la funzione-classe così definita: se $x = (B, \prec)$ è un buon ordinamento dove $B \subseteq A$, allora $\mathbf{F}(x)$ è l'unico ordinale ad esso isomorfo; altrimenti si pone $\mathbf{F}(x) = 0$. Per l'assioma di separazione, la seguente collezione è un insieme:

$$\Gamma(A) = \{(B\,, \prec) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A) \mid (B, \prec) \text{ buon ordine}\}.$$

[1] Un più corretto enunciato è il seguente: "Non esiste alcuna formula $\varphi(x, y)$ della teoria degli insiemi per cui ZF dimostra che φ determina una funzione-classe $\mathbf{F}$ definita per tutti gli insiemi e che soddisfa le proprietà (*i*) e (*ii*)".

[2] Per la dimostrazione del teorema di Zermelo si veda la sezione dedicata all'assioma di scelta.

In modo del tutto analogo a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 1.2, si dimostra che l'immagine di $\Gamma(A)$ mediante $\mathbf{F}$ coincide con $\mathbb{H}(A)$, cioè $\mathbf{F}(\Gamma(A)) = \mathbb{H}(A)$. Per rimpiazzamento, si ottiene allora che $\mathbb{H}(A)$ è un insieme.

Osserviamo che $\mathbb{H}(A)$ è un ordinale in quanto insieme transitivo di ordinali. Infatti se $\beta \in \alpha \in \mathbb{H}(A)$, per definizione esiste una funzione iniettiva $f : \alpha \to A$. Ma $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subset \alpha$; dunque anche la restrizione $f|_\beta : \beta \to A$ è iniettiva, e perciò $\beta \in \mathbb{H}(A)$. Inoltre si ha $|\mathbb{H}(A)| \not\leq |A|$, altrimenti da $|\mathbb{H}(A)| \leq |A|$, e dal fatto che $\mathbb{H}(A)$ è un ordinale, seguirebbe che $\mathbb{H}(A) \in \mathbb{H}(A)$, una contraddizione.

Per vedere che l'ordinale $\mathbb{H}(A)$ è un cardinale, supponiamo per assurdo che esista $\alpha < \mathbb{H}(A)$, cioè $\alpha \in \mathbb{H}(A)$, tale che $|\alpha| = |\mathbb{H}(A)|$. Per definizione di numero di Hartogs, $\alpha \in \mathbb{H}(A)$ se e solo se $|\alpha| \leq |A|$, e quindi avremmo che $|\mathbb{H}(A)| = |\alpha| \leq |A|$, contro quanto visto sopra. □

Corollario 3.6. *Se β è un ordinale, allora $\mathbb{H}(\beta)$ è il più piccolo cardinale maggiore di β.*

Dim. Banalmente $|\beta| \leq |\beta|$, e quindi $\beta \in \mathbb{H}(\beta)$, cioè $\beta < \mathbb{H}(\beta)$. Inoltre, se $\kappa > \beta$ è un cardinale allora $\mathbb{H}(\beta) \leq \kappa$, altrimenti si avrebbe $\kappa < \mathbb{H}(\beta)$ e quindi $|\kappa| \leq |\beta|$ mentre $|\beta| < |\kappa|$. □

Esercizio 3.7. * Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che per ogni insieme A esiste una funzione suriettiva $\theta : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \to \mathbb{H}(A)$, e quindi si ha $|\mathbb{H}(A)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$.[3]

Il teorema di Hartogs ci permetterà di chiarire il ruolo dell'assioma di scelta riguardo la nozione di cardinalità.

Una fondamentale nozione in teoria degli insiemi è la sequenza degli *alephs*.

Definizione 3.8. La sequenza degli *alephs* è definita per ricorsione transfinita come segue:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega\,; \\ \aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha)\,; \\ \aleph_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Proposizione 3.9. *La sequenza degli aleph è una sequenza strettamente crescente di cardinali infiniti.*

Dim. Procediamo per induzione transfinita. Al passo base basta notare che $\aleph_0 = \omega$ è un cardinale infinito.

Al passo successore, per le proprietà del numero di Hartogs sappiamo che $\aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha) > \aleph_\alpha$ è un cardinale. Inoltre per ogni $\gamma < \alpha$, per ipotesi induttiva $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$, e quindi anche $\aleph_\gamma < \aleph_{\alpha+1}$.

Al passo limite, abbiamo che $\aleph_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma$ è un cardinale perché unione di cardinali. Notiamo che per ogni $\gamma < \lambda$, anche $\gamma + 1 < \lambda$, e per ipotesi induttiva $\aleph_\gamma < \aleph_{\gamma+1}$; inoltre $\aleph_{\gamma+1} \leq \aleph_\lambda$ perché $\aleph_{\gamma+1} \subseteq \aleph_\lambda$. Possiamo allora concludere che vale la disuguaglianza stretta $\aleph_\gamma < \aleph_\lambda$. □

[3] Ricordiamo che vale questo risultato generale, dimostrabile senza l'uso dell'assioma di scelta:

- *Se esiste una funzione suriettiva $g : X \to Y$, allora esiste una funzione iniettiva $f : Y \to \mathcal{P}(X)$.*

Infatti basta porre $f(y) = \{x \in X \mid g(x) = y\}$.

In vista del prossimo teorema ci occorre questo

LEMMA 3.10. Per ogni ordinale α, si ha $\alpha \leq \aleph_\alpha$.

DIM. Procediamo per induzione transfinita. La base $\alpha = 0$ è banale. Al passo successore, per ipotesi induttiva sappiamo che $\beta \leq \aleph_\beta$, dunque $|\beta| \leq |\aleph_\beta|$ e perciò $\beta \in \mathbb{H}(\aleph_\beta) = \aleph_{\beta+1}$ e dunque anche $\beta + 1 < \aleph_{\beta+1}$ (ricordiamo che gli alephs sono cardinali infiniti, dunque ordinali limite). Infine al passo limite λ, per ipotesi induttiva sappiamo che $\gamma \leq \aleph_\gamma$ per ogni $\gamma < \lambda$, e quindi $\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma = \aleph_\lambda$. □

Attenzione! Nell'enunciato del Lemma qua sopra non si può mettere la disuguaglianza stretta; infatti esistono cardinali κ tali che $\kappa = \aleph_\kappa$.

ESEMPIO 3.11. Definiamo per ricorsione numerabile la successione di cardinali $(\kappa_n \mid n \in \omega)$ ponendo:

$$\begin{cases} \kappa_0 = \aleph_0\,; \\ \kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}. \end{cases}$$

Allora il cardinale $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} \kappa_n$ è tale che $\kappa = \aleph_\kappa$.

Per verificarlo, osserviamo intanto che vale la disuguaglianza $\kappa \leq \aleph_\kappa$, mostrata nel Lemma precedente. Per l'altra disuguaglianza, notiamo che κ è un cardinale infinito perché unione di cardinali infiniti; dunque κ è un ordinale limite e per definizione $\aleph_\kappa = \bigcup_{\gamma<\kappa} \aleph_\gamma$. Per ogni $\gamma < \kappa = \bigcup_{n\in\omega} \kappa_n$ esiste $n \in \omega$ con $\gamma \in \kappa_n$. Dalla crescenza degli alephs segue allora che $\aleph_\gamma < \aleph_{\kappa_n} = \kappa_{n+1} \leq \kappa$. Visto che questa disuguaglianza vale per ogni $\gamma < \kappa$, concludiamo che $\aleph_\kappa = \bigcup_{\gamma<\kappa} \aleph_\gamma \leq \kappa$, come volevamo.

ESERCIZIO 3.12. Dimostrare che la sequenza $(\kappa_n \mid n \in \omega)$ definita nell'Esempio 3.11 è strettamente crescente.

ESERCIZIO 3.13. Dimostrare che la sequenza degli alephs ha punti fissi arbitrariamente grandi, cioè per ogni ordinale α esiste $\kappa > \alpha$ tale che $\aleph_\kappa = \kappa$.

La sequenza degli alephs enumera tutti i cardinali infiniti.

TEOREMA 3.14. *Gli alephs sono tutti e soli i cardinali infiniti.*

DIM. Abbiamo già osservato che tutti gli alephs sono cardinali infiniti. Dobbiamo vedere che vale anche il viceversa, cioè che per ogni cardinale infinito κ esiste un ordinale α tale che $\kappa = \aleph_\alpha$.

Abbiamo visto che $\kappa \leq \aleph_\kappa$; inoltre, vista la crescenza della funzione aleph, $\aleph_\kappa < \aleph_{\kappa+1}$, dove $\kappa + 1$ è l'ordinale successore di κ. Esistono quindi ordinali γ per i quali vale la disuguaglianza stretta $\kappa < \aleph_\gamma$. Sia β il minimo di questi ordinali. Notiamo che un tale β non può essere 0, altrimenti avrei $\kappa < \aleph_0$, mentre κ è per ipotesi un cardinale infinito. Inoltre un tale β non può essere limite, altrimenti da $\kappa < \aleph_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \aleph_\gamma$ seguirebbe l'esistenza di un $\gamma < \beta$ tale che $\kappa < \aleph_\gamma$, contro la minimalità di β. Allora necessariamente $\beta = \alpha + 1$ è un successore, e pertanto si ha $\aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_{\beta+1}$. Infine osserviamo che $\kappa \in \aleph_{\beta+1} = \mathbb{H}(\aleph_\beta)$ significa che $|\kappa| \leq |\aleph_\beta|$, e quindi $\kappa \leq \aleph_\beta$, trattandosi di cardinali. Concludiamo quindi che $\kappa = \aleph_\beta$. □

TEOREMA 3.15. *Ogni insieme infinito bene ordinabile è equipotente ad un unico aleph.*

Dim. Sia B un insieme bene ordinabile, e sia $\prec$ un buon ordine su B. Allora esiste (ed unico) ordinale α tale che $(B, \prec) \cong (\alpha, \in)$. In particolare $|B| = |\alpha|$. Se $\kappa = \min\{\beta \leq \alpha \mid |\beta| = |\alpha|\}$ allora κ è un cardinale e $|\kappa| = |\alpha| = |B|$. Visto che ogni cardinale infinito è un aleph, la dimostrazione è conclusa. $\square$

Corollario 3.16 (ZF). Il Teorema di Zermelo è equivalente alla proprietà: "Ogni insieme infinito è equipotente ad un aleph".

Dim. Se vale il Teorema di Zermelo, ogni insieme infinito è bene ordinabile e dunque, per il teorema precedente, ogni insieme infinito è equipotente ad un aleph. Viceversa, basta notare che se esiste una bigezione $f : A \to \aleph_\alpha$ da un insieme A in un aleph (che è bene ordinato), allora A è bene ordinabile; basta infatti definire $a < a' \Leftrightarrow f(a) < f(a')$. $\square$

Esattamente come accadeva per gli ordinali, anche i cardinali si dividono in cardinali successori e cardinali limite.

Definizione 3.17. Un cardinale κ si dice *successore* se esiste il massimo dei cardinali $\mu < \kappa$. Un cardinale $\kappa \neq 0$ si dice *limite* altrimenti.

Notiamo che ogni numero naturale $n \neq 0$ è un cardinale successore. Inoltre:

Proposizione 3.18. *Sia κ un cardinale infinito. Allora κ è successore se e solo se $\kappa = \aleph_\alpha$ dove $\alpha = \beta + 1$ è un ordinale successore; e κ è limite se e solo se $\kappa = \aleph_\lambda$ dove λ è un ordinale limite.*

Dim. Per esercizio. $\square$

Il prossimo risultato fornirà una proprietà fondamentale dell'algebra cardinale, e ci consentirà anche di dimostrare alcune formulazioni equivalenti dell'assioma di scelta AC in termine di proprietà di cardinalità.

Teorema 3.19 (ZF). *Per ogni ordinale α, si ha $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = |\aleph_\alpha|$.*

Dim. Procediamo per induzione transfinita. Abbiamo già visto che $|\omega \times \omega| = |\omega|$, e dunque la base di induzione $\alpha = 0$ vale.

Consideriamo ora un aleph $\aleph_\alpha$ con $\alpha > 0$ e definiamo un buon ordinamento sul prodotto cartesiano $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ come segue:

- $(\xi, \eta) \prec (\xi', \eta')$ se $\max\{\xi, \eta\} < \max\{\xi', \eta'\}$;
  oppure se $\max\{\xi, \eta\} = \max\{\xi', \eta'\}$ e $\xi < \xi'$;
  oppure infine se $\max\{\xi, \eta\} = \max\{\xi', \eta'\}$ e $\xi = \xi'$ e $\eta < \eta'$.

Si verifica facilmente che si tratta di un buon ordinamento. È immediato che $|\aleph_\alpha| \leq |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha|$. Se per assurdo fosse $|\aleph_\alpha| < |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha|$, per la tricotomia dei buoni ordini avremmo che $\aleph_\alpha$ sarebbe isomorfo ad un segmento iniziale proprio $S = (\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha)_{(\xi,\eta)}$ di $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \prec)$. Sia $\zeta = \max\{\xi, \eta\}$; osserviamo che se $(\xi', \eta') \prec (\xi, \eta)$ allora $\max\{\xi', \eta'\} \leq \zeta$, e quindi $S \subseteq (\zeta + 1) \times (\zeta + 1)$. Poichè $\zeta < \aleph_\alpha$, anche $\zeta + 1 < \alpha_\alpha$ e quindi $|\zeta + 1| = \aleph_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$. Otteniamo quindi la contraddizione:

$$|\aleph_\alpha| = |S| \leq |(\zeta + 1) \times (\zeta + 1)| = |\aleph_\beta \times \aleph_\beta| = \text{(per ipotesi induttiva)} = |\aleph_\beta| < |\aleph_\alpha|.$$

$\square$