ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
Dispensa 7

Mauro Di Nasso

Ultimo aggiornamento: December 8, 2024

Algebra ordinale

1. Somma, prodotto, ed esponenziazione di ordinali

Come primo esempio rilevante di applicazione del teorema di ricorsione nella sua forma più generale, definiamo le fondamentali operazioni algebriche di somma e prodotto tra ordinali.

Definizione 1.1. Per ogni ordinale fissato α, per ricorsione transfinita su β poniamo:

$$\begin{cases} \alpha + 0 & = \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) & = (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda & = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha + \beta \ \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 & = 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) & = (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda & = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha \cdot \beta \ \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Le definizioni date sopra sono coerenti con le operazioni di somma e prodotto tra buoni ordini che avevamo definito in precedenza.

Proposizione 1.2. *Siano α e β ordinali. Allora:*
(1) *L'insieme bene ordinato $\alpha \boldsymbol{+} \beta$ è isomorfo alla somma ordinale $\alpha + \beta$;*
(2) *L'insieme bene ordinato $\alpha \boldsymbol{\times} \beta$ è isomorfo al prodotto ordinale $\alpha \cdot \beta$.*

Dim. (1) Ricordiamo che $\alpha \boldsymbol{+} \beta = (\alpha \uplus \beta, \prec)$ dove $\alpha \uplus \beta$ è l'unione *disgiunta* di α e β, e dove l'ordine $\prec$ mantiene l'ordine tra coppie di elementi di α e tra coppie di elementi di β, e impone che $a \prec b$ se $a \in \alpha$ e $b \in \beta$.

Procediamo per induzione transfinita su β, e mostriamo che esiste un isomorfismo $\psi_\beta : \alpha \boldsymbol{+} \beta \to \alpha + \beta$.

Se $\beta = 0$, la tesi è banale. Supponiamo ora $\beta = \gamma + 1$ successore. Per ipotesi induttiva esiste un isomorfismo $\psi : \alpha \boldsymbol{+} \gamma \to \alpha + \gamma$. Ma allora $\psi' = \psi \cup \{(\gamma, \alpha + \gamma)\}$ è l'isomorfismo cercato tra l'insieme bene ordinato $\alpha \boldsymbol{+} (\gamma + 1) = \alpha \boldsymbol{+} (\gamma \cup \{\gamma\})$, e l'ordinale $\alpha + (\gamma + 1)$, che per definizione è uguale a $(\alpha + \gamma) + 1 = (\alpha + \gamma) \cup \{\alpha + \gamma\}$.

Se β è limite, allora $\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \gamma$ e quindi

$$\alpha \boldsymbol{+} \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\bigcup_{\gamma<\beta} \gamma \times \{1\}) = \bigcup_{\gamma<\beta} ((\alpha \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\})) = \bigcup_{\gamma<\beta} (\alpha \boldsymbol{+} \gamma).$$

Inoltre, per definizione di somma con un ordinale limite, $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$. Per ipotesi induttiva, per ogni $\gamma < \beta$ esiste un isomorfismo $\psi_\gamma : \alpha \boldsymbol{+} \gamma \to \alpha + \gamma$. Vista l'unicità degli isomorfismi tra insiemi bene ordinati, necessariamente per ogni $\gamma' < \gamma < \beta$, la restrizione di ψ_γ all'insieme $\alpha \boldsymbol{+} \gamma'$ coincide con $\psi_{\gamma'}$. Dunque le funzioni in $\{\psi_\gamma \mid \gamma < \beta\}$ sono a due a due compatibili, e la loro unione $\psi = \bigcup_{\gamma<\beta} \psi_\gamma : \alpha \boldsymbol{+} \beta \to \alpha + \beta$ è l'isomorfismo cercato.

(2) Ricordiamo che $\alpha \boldsymbol{\times} \beta = (\alpha \times \beta, \prec)$ dove $\prec$ è l'ordine *antilessicografico*, cioè $(a, b) \prec (a', b')$ se $b < b'$ in β, oppure se $b = b'$ e $a < a'$ in α.

Per induzione transfinita su β, dimostriamo che gli insiemi bene ordinati $\alpha \times \beta$ e $\alpha \cdot \beta$ sono isomorfi.

Se $\beta = 0$, la tesi è banale perché $\alpha \times 0 = 0 = \alpha \cdot 0$ è l'insieme vuoto. Supponiamo ora $\beta = \gamma + 1$ successore. Informalmente, $\alpha \times (\gamma + 1)$ si ottiene disponendo in sequenza $\gamma + 1$ copie successive di α, cioè γ copie di α seguite da un'ultima copia di α. È dunque facile mostrare che esiste un isomorfismo $\alpha \times (\gamma + 1) \cong (\alpha \times \gamma) + \alpha$. Per ipotesi induttiva, quest'ultimo è isomorfo a $(\alpha \cdot \gamma) + \alpha$, il quale a sua volta, per quanto già dimostrato riguardo la somma, è isomorfo a $(\alpha \cdot \gamma) + \alpha$. Concludiamo notando che, per definizione, $(\alpha \cdot \gamma) + \alpha = \alpha \cdot (\gamma + 1)$.

Se β è limite, notiamo che $\alpha \times \beta = \alpha \times (\bigcup_{\gamma<\beta} \gamma) = \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha \times \gamma)$. Notiamo inoltre, per definizione di prodotto ordinale, $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha \cdot \gamma$. Si procede poi esattamente come nella dimostrazione del passo limite della somma, considerando l'unione $\bigcup_{\gamma<\beta} \psi_\gamma$ dove ψ_γ è (l'unico) isomorfismo dato dall'ipotesi induttiva tra $\alpha \times \gamma$ e $\alpha \cdot \gamma$. □

Esercizio 1.3. Dimostrare che per ogni ordinale α si ha $0 + \alpha = \alpha$ e $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Esercizio 1.4. Per ogni ordinale infinito α e per ogni $n \in \omega$ si ha che $n + \alpha = \alpha$. Vale l'analoga proprietà per il prodotto? Cioè, se α è un ordinale infinito e $n \geq 1$ è un numero naturale allora necessariamente $n \cdot \alpha = \alpha$?

Ricordiamo che valgono le proprietà associative della somma e del prodotto fra buoni ordini (vedi Esercizi **??** e **??**):

$$A + (B + C) \cong (A + B) + C; \quad A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C.$$

Come conseguenza diretta della proposizione precedente, si ottiene che anche la somma e il prodotto tra ordinali sono operazioni associative.

Analogamente, dalla proprietà distributiva del prodotto tra buoni ordini rispetto alla somma (vedi Proposizione **??**):

$$A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C),$$

si ottiene la proprietà distributiva anche per gli ordinali.

Di seguito, dimostriamo direttamente quelle proprietà degli ordinali usando l'induzione transfinita, senza fare ricorso agli analoghi risultati dei buoni ordini.

Proposizione 1.5. *Siano α, β, γ ordinali.*

(1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ *;*
(2) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ *;*
(3) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Dim. Fissati α e β, dimostriamo tutte e tre le proprietà procedendo per induzione transfinita su γ.

(1). Il caso base $\gamma = 0$ è banale. Nel caso successore $\gamma = \delta + 1$ abbiamo:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + (\beta + (\delta + 1)) \stackrel{1}{=} \alpha + ((\beta + \delta) + 1) \stackrel{2}{=} (\alpha + (\beta + \delta)) + 1 \stackrel{3}{=}$$
$$\stackrel{3}{=} ((\alpha + \beta) + \delta) + 1 \stackrel{4}{=} (\alpha + \beta) + (\delta + 1) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$

dove nelle uguaglianze 1, 2, e 4 abbiamo usato la definizione di somma con un ordinale successore, e nell'uguaglianza 3 abbiamo usato l'ipotesi induttiva. Infine, nel caso limite $\gamma = \lambda$ abbiamo:

$$(\alpha + \beta) + \lambda \stackrel{1}{=} \bigcup_{\delta<\lambda} ((\alpha + \beta) + \delta) \stackrel{2}{=} \bigcup_{\delta<\lambda} (\alpha + (\beta + \delta)) \stackrel{3}{=} \bigcup_{\xi<\beta+\lambda} \alpha + \xi \stackrel{4}{=} \alpha + (\beta + \lambda).$$

dove nelle uguaglianze 1 e 4 abbiamo usato la definizione di somma con un ordinale limite, e nell'uguaglianza 2 abbiamo usato l'ipotesi induttiva. Inoltre, nell'uguaglianza 3, abbiamo usato il fatto che le unioni di ordinali corrispondono agli estremi superiori, che $(\beta + \delta \mid \delta < \lambda)$ è una sequenza infinita crescente illimitata in $\beta + \lambda$, e che quindi $\sup\{\alpha + (\beta + \delta) \mid \delta < \lambda\} = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta + \lambda\}$.

(3). Il caso base $\gamma = 0$ è banale. Nel caso successore $\gamma = \delta + 1$ abbiamo:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot (\beta + (\delta + 1)) \stackrel{1}{=} \alpha \cdot ((\beta + \delta) + 1) \stackrel{2}{=} \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha \stackrel{3}{=}$$

$$\stackrel{3}{=} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha \stackrel{4}{=} \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \delta + \alpha) \stackrel{5}{=} \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot (\delta + 1)) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

dove nelle uguaglianze 1 e 5 abbiamo usato la definizione di somma con un ordinale successore, nell'uguaglianza 2 abbiamo usato la definizione di prodotto per un ordinale successore, nell'uguaglianza 3 abbiamo usato l'ipotesi induttiva, e nell'uguaglianza 4 abbiamo usato la proprietà associativa della somma vista sopra.

Nel caso limite $\gamma = \lambda$ abbiamo:

$$\alpha \cdot (\beta + \lambda) \stackrel{1}{=} \bigcup_{\xi < \beta + \lambda} \alpha \cdot \xi \stackrel{2}{=} \bigcup_{\delta < \lambda} \alpha \cdot (\beta + \delta) \stackrel{3}{=} \bigcup_{\delta < \lambda} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) \stackrel{4}{=} \bigcup_{\eta < \alpha \cdot \lambda} (\alpha \cdot \beta + \eta) \stackrel{5}{=} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \lambda,$$

dove nelle uguaglianze 1 e 5 abbiamo usato la definizione di somma con un ordinale limite, e nell'uguaglianza 3 abbiamo usato l'ipotesi induttiva. Inoltre, nelle uguaglianze 2 e 4 abbiamo usato il fatto che le unioni di ordinali corrispondono agli estremi superiori, che $(\beta + \delta \mid \delta < \lambda)$ e $(\alpha \cdot \delta \mid \delta < \lambda)$ sono sequenze infinite crescenti illimitate rispettivamente in $\beta + \lambda$ e in $\alpha \cdot \lambda$, e che quindi $\sup\{\alpha \cdot (\beta + \delta) \mid \delta < \lambda\} = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta + \lambda\}$, e $\sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta \mid \delta < \lambda\} = \sup\{\alpha \cdot \beta + \eta \mid \eta < \alpha \cdot \lambda\}$.

(2). Il caso base $\gamma = 0$ è banale. Nel caso successore $\gamma = \delta + 1$ abbiamo:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot (\beta \cdot (\delta + 1)) \stackrel{1}{=} \alpha \cdot ((\beta \cdot \delta) + \beta) \stackrel{2}{=} \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) + \alpha \cdot \beta \stackrel{3}{=}$$

$$\stackrel{3}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta + \alpha \cdot \beta \stackrel{4}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot (\delta + 1) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

dove nelle uguaglianze 1 e 4 abbiamo usato la definizione di prodotto con un ordinale limite, nell'uguaglianza 2 abbiamo usato la proprietà distributiva (3) vista sopra, e nell'uguaglianza 3 abbiamo usato l'ipotesi induttiva.

Nel caso limite $\gamma = \lambda$ abbiamo:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \lambda) \stackrel{1}{=} \bigcup_{\xi < \beta \cdot \lambda} \alpha \cdot \xi \stackrel{2}{=} \bigcup_{\delta < \lambda} (\alpha \cdot (\beta \cdot \delta)) \stackrel{3}{=} \bigcup_{\delta < \lambda} ((\alpha \cdot \beta) \cdot \delta) \stackrel{4}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \lambda,$$

dove nelle uguaglianze 1 e 4 abbiamo usato la definizione di prodotto con un ordinale limite, e nell'uguaglianza 3 abbiamo usato l'ipotesi induttiva. Inoltre, nell'uguaglianza 2 abbiamo usato il fatto che le unioni di ordinali corrispondono agli estremi superiori, che $(\beta \cdot \delta \mid \delta < \lambda)$ è una sequenza infinita crescente illimitata in $\beta \cdot \lambda$, e che quindi $\sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) \mid \delta < \lambda\} = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta \cdot \lambda\}$. □

Esercizio 1.6. Dimostrare che per β e per ogni $\gamma \geq 1$ si ha $\beta < \beta + \gamma$. Analogamente, dimostrare che per β e per ogni $\gamma \geq 2$ si ha $\beta < \beta \cdot \gamma$.

Proposizione 1.7. *Siano $\alpha, \beta \neq 0$ ordinali. Allora:*

(1) *La somma $\alpha + \beta$ è un successore se e solo se β è un successore.*
(2) *Il prodotto $\alpha \cdot \beta$ è un successore se e solo se sia α che β sono successori.*
(3) *Se $\alpha \geq 2$, l'esponenziale α^β è un successore se e solo se $\beta \in \omega$ è un numero naturale.*

Dim. FARE □

Possiamo riassumere i risultati della proposizione precedente nella seguente tabella, dove "S" indica ordinale *successore*, e "L" indica ordinale *limite*.

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha\cdot\beta$	α^β
S	S	S	S	S se $\beta\in\omega$; L se $\beta\notin\omega$
S	L	L	L	L
L	S	S	L	L
L	L	L	L	L

Il primo importante risultato sull'algebra ordinale è il seguente.

Teorema 1.8 (Sottrazione a destra). *Se $\alpha<\beta$, allora esiste ed unico $\gamma>0$ tale che $\alpha+\gamma=\beta$.*

Dim. Dimostriamo intanto questa semplice proprietà preliminare.

- *Per tutti gli α,β ordinali si ha $\alpha+\beta\geq\beta$.*

Procediamo per induzione su β. Il caso $\beta=0$ è banale perchè $\alpha+0=\alpha\geq 0=\beta$. Se $\beta=\delta+1$ è successore, dall'ipotesi induttiva $\alpha+\delta\geq\delta$ segue direttamente che $\alpha+\beta=(\alpha+\delta)+1\geq\delta+1=\beta$. Infine se β è un ordinale limite, allora $\alpha+\beta=\bigcup_{\delta<\beta}\alpha+\delta\geq$ (per ipotesi induttiva) $\geq\bigcup_{\delta<\beta}\delta=\beta$.

Alternativamente, basta notare che la mappa $\psi:\gamma\mapsto\alpha+\gamma$ determina un isomorfismo tra $(\beta,\in)$ e $((\alpha+\beta)\setminus\alpha,\in)$. Visto che $(\alpha+\beta)\setminus\alpha\subseteq\alpha+\beta$ si ha che $\mathrm{ot}(\beta)=\mathrm{ot}((\alpha+\beta)\setminus\alpha)\leq\mathrm{ot}(\alpha+\beta)$, e quindi $\beta\leq\alpha+\beta$.

La proprietà di sopra garantisce l'esistenza di ordinali ξ tali $\alpha+\xi>\beta$; ad esempio $\alpha+(\beta+1)\geq\beta+1>\beta$. Prendiamo il minimo δ di tali ordinali ξ, cioè $\delta=\min\{\xi\mid\alpha+\xi>\beta\}$. Ovviamente $\delta\neq 0$ perché $\alpha<\beta$. Osserviamo inoltre che δ non è un ordinale limite, altrimenti da $\beta<\alpha+\delta=\bigcup_{\eta<\delta}\alpha+\eta$ seguirebbe che $\beta<\alpha+\eta$ per un opportuno $\eta<\delta$, contro la minimalità di δ. Quindi $\delta=\gamma+1$ è un successore, e si ha $\alpha+\gamma\leq\beta<\alpha+\gamma+1$, e quindi $\beta=\alpha+\gamma$.

Per provare l'unicità della differenza, supponiamo che $\alpha+\gamma=\beta$ e $\alpha+\gamma'=\beta$. Se per assurdo γ e γ' fossero diversi, allora uno sarebbe maggiore dell'altro, ad esempio $\gamma>\gamma'$. Per quanto dimostrato sopra, allora esisterebbe una differenza η tale che $\gamma=\gamma'+\eta$. Ovviamente $\eta>0$ perché $\gamma>\gamma'$, e quindi avremmo che $\beta=\alpha+\gamma=\alpha+\gamma'+\eta=\beta+\eta>\beta$, assurdo. □

Somme e prodotti tra ordinali preservano le disuguaglianze deboli a sinistra, e preservano le disuguaglianze forti a destra.

Proposizione 1.9. *Siano α,β,γ ordinali.*

(1) *Se $\alpha\leq\beta$ allora $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$;*
(2) *Se $\alpha<\beta$ allora $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$;*
(3) *Se $\alpha\leq\beta$ allora $\alpha\cdot\gamma\leq\beta\cdot\gamma$;*
(4) *Se $\alpha<\beta$ e $\gamma\geq 1$ allora $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$.*

Dim. (1). Fissati $\alpha\leq\beta$, procediamo per induzione transfinita su γ. Il caso base è banale perché $\alpha+0=\alpha\leq\beta=\beta+0$. Se $\gamma=\delta+1$ è successore, dall'ipotesi induttiva $\alpha+\delta\leq\beta+\delta$ segue subito che $\alpha+\gamma=\alpha+\delta+1\leq\beta+\delta+1=\beta+\gamma$.

Infine se γ è un ordinale limite, dalle definizione di somma per un ordinale limite si ha che

$$\alpha+\gamma=\bigcup_{\delta<\gamma}\alpha+\delta\leq \text{ (per ipotesi induttiva) } \leq\bigcup_{\delta<\gamma}\beta+\delta=\beta+\gamma.$$

Alternativamente, notiamo che la funzione $\psi:\alpha+\gamma\to\beta+\gamma$ dove $\psi(\delta)=\delta$ per ogni $\delta<\alpha$, e $\psi(\alpha+\varepsilon)=\beta+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon<\gamma$, preserva l'ordine. Quindi $\alpha+\gamma=\mathrm{ot}(\mathrm{Imm}(\psi))\leq\beta+\gamma$.

(2). Per il Teorema della differenza, esiste $\delta>0$ tale che $\beta=\alpha+\delta$. Allora $\gamma+\alpha<\gamma+\alpha+\delta=\gamma+\beta$.

(3). Si procede in modo analogo ad (1) per induzione transfinita su γ. Il caso base è banale perché $\alpha\cdot 1=\alpha\leq\beta=\beta\cdot 1$. Se $\gamma=\delta+1$ è successore, dall'ipotesi induttiva $\alpha\cdot\delta\leq\beta\cdot\delta$ e dal fatto che le somme preservano le disuguaglianze deboli, si ottiene che

$$\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot\delta+\alpha\leq\beta\cdot\delta+\alpha\leq\beta\cdot\delta+\beta=\beta\cdot\gamma.$$

Infine se γ è un ordinale limite, dalle definizione di prodotto per un ordinale limite si ha che

$$\alpha\cdot\gamma=\bigcup_{\delta<\gamma}\alpha\cdot\delta\leq \text{ (per ipotesi induttiva) } \leq\bigcup_{\delta<\gamma}\beta\cdot\delta=\beta\cdot\gamma.$$

(4). Per il Teorema della differenza, esiste $\delta>0$ tale che $\beta=\alpha+\delta$. Allora, usando la proprietà distributiva, si ha $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\alpha+\gamma\cdot\delta=\gamma\cdot(\alpha+\delta)=\gamma\cdot\beta$. Notiamo che avere la disuguaglianza stretta $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\alpha+\gamma\cdot\delta$ è necessaria l'ipotesi $\gamma>0$. □

Nota bene 1.10. Osserviamo che le somme e i prodotti a sinistra in generale non preservano gli ordini stretti. Ad esempio $2<3$ ma $2+\omega=\omega=3+\omega$; e $2\cdot\omega=\omega=3\cdot\omega$.

Teorema 1.11 (Divisione euclidea). *Per ogni α e per ogni $\beta\neq 0$, esistono ed unici γ e $\rho<\beta$ tali che $\alpha=\beta\cdot\gamma+\rho$.*

Dim. Dimostriamo prima l'esistenza. Osserviamo che esistono ordinali ξ tali che $\beta\cdot\xi>\alpha$. Infatti, ad esempio, $\beta\cdot(\alpha+1)\geq 1\cdot(\alpha+1)=\alpha+1>\alpha$. Prendiamo allora il minimo δ di tali ordinali, cioè $\delta=\min\{\xi\mid\beta\cdot\xi>\alpha\}$. Chiaramente $\delta\neq 0$. Inoltre δ non è un ordinale limite, perché altrimenti da $\beta<\alpha\cdot\delta=\bigcup_{\eta<\delta}\alpha\cdot\eta$ seguirebbe che $\beta<\alpha\cdot\eta$ per un opportuno $\eta<\delta$, contro la minimalità di δ. Allora $\delta=\gamma+1$ è un successore, e si ha $\beta\cdot\gamma\leq\alpha<\alpha\cdot(\gamma+1)$. Per il Teorema della differenza, esiste $\rho\geq 0$ tale che $\alpha=\beta\cdot\gamma+\rho$. Osserviamo che il resto $\rho<\gamma$ altrimenti da $\rho\geq\gamma$ seguirebbe che $\alpha=\beta\cdot\gamma+\rho\geq\alpha\cdot\gamma+\gamma=\alpha\cdot(\gamma+1)$.

Occupiamoci adesso dell'unicità e supponiamo che $\alpha=\beta\cdot\gamma+\rho$ e $\alpha=\beta\cdot\gamma'+\rho'$ dove $\rho<\gamma$ e $\rho'<\gamma'$. Se per assurdo γ e γ' fossero diversi, allora uno sarebbe maggiore dell'altro, ad esempio $\gamma>\gamma'$. Per il teorema sulla differenza esisterebbe allora $\delta>0$ tale che $\gamma=\gamma'+\delta$ e si avrebbe

$$\alpha=\beta\cdot\gamma'+\rho'<\beta\cdot\gamma'+\gamma'=\beta\cdot(\gamma'+1)\leq\beta\cdot(\gamma'+\delta)=\beta\cdot\gamma\leq\beta\cdot\gamma+\rho=\alpha,$$

contro l'ipotesi. Visto che $\gamma=\gamma'$, per l'unicità della differenza a destra tra α e $\beta\cdot\gamma$ si ottiene infine che $\rho=\rho'$. □

Introduciamo adesso l'operazione di esponenziazione tra ordinali.

Definizione 1.12. *Per ogni ordinale fissato $\alpha \geq 1$, per ricorsione transfinita su β poniamo:*

$$\begin{cases} \alpha^0 & = 1 \\ \alpha^{\beta+1} & = (\alpha^\beta) \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda & = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Osserviamo che banalmente $1^\beta = 1$ per ogni ordinale β.

Esercizio 1.13. Dimostrare che per ogni base fissata $\alpha \geq 2$, la funzione classe $\beta \longmapsto \alpha^\beta$ dalla classe degli ordinali in sé è strettamente crescente.

La definizione di sopra è coerente con l'esponenziazione tra buoni ordini che avevamo definito in precedenza.

Esercizio 1.14. Siano α, β ordinali con $\alpha \geq 1$. Allora l'insieme bene ordinato $\mathrm{Exp}(\alpha, \beta)$ è isomorfo all'esponenziale ordinale α^β.

Esercizio 1.15. Dimostrare che, analogamente a somme e prodotti, anche le esponenziazioni tra ordinali preservano gli ordini deboli a sinistra e gli ordini stretti a destra:

(1) Se $\alpha \leq \beta$ allora $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$;
(2) Se $\alpha < \beta$ e $\gamma \geq 2$ allora $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$.

Le prossime due proprietà mettono in relazione l'esponenziale con somme e prodotti, e sono del tutto analoghe alle proprietà della usuale funzione esponenziale per numeri reali.

Proposizione 1.16. *Siano α, β, γ ordinali con $\alpha \geq 1$.*

(1) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;
(2) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Dim. Nel seguito assumeremo $\alpha \geq 2$, altrimenti la tesi è banale.

(1). Per α e β fissati, procediamo per induzuone transfinita su γ. Il caso base $\gamma = 0$ è immediato perché $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^\beta \cdot \alpha^0 = \alpha^\beta \cdot 1 = \alpha^\beta = \alpha^{\beta+0}$. Se $\gamma = \delta + 1$ è successore, allora $\alpha^\beta \cdot \alpha^{\delta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta \cdot \alpha =$ (per ipotesi induttiva) $= \alpha^{\beta+\delta} \cdot \alpha = \alpha^{\beta+\delta+1} = \alpha^{\beta+\gamma}$. Consideriamo ora il caso in cui γ è limite. Ricordiamo che allora anche gli ordinali α^γ e $\beta + \gamma$ sono limite; inoltre $(\alpha^\delta \mid \delta < \gamma)$ è illimitato in α^γ e $(\alpha^{\beta+\delta} \mid \delta < \gamma)$ è illimitato in $\alpha^{\beta+\gamma}$. Abbiamo quindi:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \bigcup_{\eta<\alpha^\gamma} \alpha^\beta \cdot \eta = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta = \text{(ipotesi induttiva)} = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta+\delta} = \bigcup_{\zeta<\beta+\gamma} \alpha^\zeta = \alpha^{\beta+\gamma}.$$

(2). Come sopra, per α e β fissati, procediamo per induzuone transfinita su γ. Il caso base $\gamma = 0$ è immediato perché $(\alpha^\beta)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{\beta\cdot 0}$. Se $\gamma = \delta + 1$ è successore, allora $(\alpha^\beta)^{\delta+1} = (\alpha^\beta)^\delta \cdot \alpha^\beta \overset{1}{=} \alpha^{\beta\cdot\delta} \cdot \alpha^\beta \overset{2}{=} \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta} = \alpha^{\beta\cdot(\delta+1)} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$, dove nell'uguaglianza 1 abbiamo usato l'ipotesi induttiva, e nell'uguaglianza 2 abbiamo usato la proprietà (1) di sopra. Consideriamo infine il caso in cui γ è limite. Ricordiamo che allora anche gli ordinali $\beta \cdot \gamma$ e $\alpha^{\beta\cdot\gamma}$ sono limite; e inoltre $(\alpha^{\beta\cdot\delta} \mid \delta < \gamma)$ è illimitato in $\alpha^{\beta\cdot\gamma}$. Abbiamo quindi:

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha^\beta)^\delta = \text{(ipotesi induttiva)} = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\cdot\delta} = \bigcup_{\eta<\beta\cdot\gamma} \alpha^\eta = \alpha^{\beta\cdot\gamma}.$$

$\square$

Proposizione 1.17. *Per ogni ordinale $\alpha \neq 0$ esiste ed unico δ tale che*
$$\omega^\delta \leq \alpha < \omega^{\delta+1}.$$

Dim. Se $\alpha = 1$, chiaramente la proprietà richiesta è vera con $\delta = 0$. Se $\alpha > 1$, prendiamo $\xi = \min\{\eta \leq \alpha + 1 \mid \omega^\eta > \alpha\}$. Notiamo che la definizione è ben posta perché quell'insieme è non vuoto; ad esempio, $\omega^{\alpha+1} \geq \alpha + 1 > \alpha$. Un tale minimo ξ non può essere un limite, altrimenti da $\alpha < \omega^\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \omega^\eta$ seguirebbe che $\alpha < \omega^\eta$ per qualche $\eta < \xi$, contro la minimalità di ξ. Allora $\xi = \delta + 1$ per un opportuno δ e quindi $\omega^\delta \leq \alpha < \omega^{\delta+1}$. □

Esercizio 1.18. Per ogni ordinale infinito α esistono ed unici ordinale δ e numero naturale positivo n tali che
$$\left(\omega^{(\omega^\delta)}\right)^n \leq \alpha < \left(\omega^{(\omega^{\delta+1})}\right)^{n+1}.$$

Il prossimo risultato ci mostra un'utile rappresentazione degli ordinali "in base ω".

Teorema 1.19 (Forma normale di Cantor). *Per ogni $\alpha > 0$ esistono ed unici $\beta_1 > \ldots > \beta_k$ ordinali e $n_1, \ldots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ numeri naturali non nulli tali che*
$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \ \ldots \ + \omega^{\beta_k} \cdot n_k.$$

Dim. Vediamo prima l'esistenza. Procediamo per induzione su $\alpha \geq 1$. La base è ovvia perché $1 = \omega^0 \cdot 1$ è una forma normale di Cantor. Se $\alpha > 1$, prendiamo δ tale che che $\omega^\delta \leq \alpha < \omega^{\delta+1}$. Dividendo α per ω^δ si ottiene $\alpha = \omega^\delta \cdot \vartheta + \rho$ dove il resto $\rho < \omega^\delta$. Notiamo che il quoziente $\vartheta < \omega$ è un numero naturale, altrimenti $\vartheta \geq \omega \Rightarrow \alpha \geq \omega^\delta \cdot \omega = \omega^{\delta+1}$, contro l'assunzione su δ. Inoltre $\vartheta \neq 0$ altrimenti $\alpha = \rho < \omega^\delta$. Se $\rho = 0$ abbiamo già ottenuto la forma normale di Cantor. Altrimenti applichiamo l'ipotesi induttiva al resto ρ (che è minore di α) ed otteniamo l'esistenza di ordinali $\beta_2 > \ldots > \beta_k$ e di numeri naturali non nulli $n_2, \ldots, n_k$ tali che $\rho = \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k$. Visto che $\rho < \omega^\delta$ e $\rho \geq \omega^{\beta_2}$, deve essere $\beta_2 < \delta$. Se poniamo $\beta_1 = \delta$ e $n_1 = \vartheta$, si ottiene la forma normale cercata:
$$\alpha \ = \ \omega^\delta \cdot \vartheta + \rho \ = \ \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \ \ldots \ + \omega^{\beta_n} \cdot n_k.$$

Per vedere l'unicità, supponiamo di avere due forme normali di Cantor per lo stesso ordinale:
$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \ \ldots \ + \omega^{\beta_k} \cdot n_k.$$
$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \ \ldots \ + \omega^{\gamma_h} \cdot m_h.$$

Notiamo che n_1 è il quoziente della divisione euclidea di α con ω^{β_1}, ed il resto è $\rho = \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k < \omega^{\beta_1}$. Infatti:
$$\rho \leq \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \ \ldots \ + \omega^{\beta_2} \cdot n_k \ \leq \ \omega^{\beta_2} \cdot (n_2 + \ldots + n_k) \ < \ \omega^{\beta_2} \cdot \omega \ = \ \omega^{\beta_2+1} \ \leq \ \omega^{\beta_1}.$$
(Se $k = 1$ si pone $\rho = 0$). Analogamente, m_1 è il quoziente della divisione euclidea di α con ω^{γ_1}, ed il resto è $\sigma = \omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \ \ldots \ + \omega^{\gamma_h} \cdot m_h$ (se $h = 1$ si pone $\sigma = 0$). Osserviamo che $\beta_1 = \gamma_1$, altrimenti da $\beta_1 < \gamma_1$ seguirebbe che
$$\alpha \ = \ \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \rho \ < \ \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_1} \ < \ \omega^{\beta_1+1} \ \leq \ \omega^{\gamma_1} \ \leq \ \alpha.$$
Un'analoga contraddizione si otterrebbe assumendo $\beta_1 > \gamma_1$. Ma allora, dall'unicità del quoziente e del resto nella divisione euclidea di α con $\omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$, segue che le due forme normali di Cantor necessariamente coincidono. □

Esercizio 1.20. Dimostrare che la forma normale del teorema di Cantor vale anche se si rimpiazzano le potenze di ω con le potenze di un ordinale fissato $\beta \geq 2$. Precisamente:

- *Per ogni ordinale* $\alpha \geq 1$ *e per ogni ordinale* $\beta \geq 2$ *esistono ed unici* $\gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ *e* $0 < c_1, \ldots, c_k < \beta$ *tali che* $\alpha = \beta^{\gamma_1} \cdot c_1 + \ldots + \beta^{\gamma_k} \cdot c_k$.

Ricordiamo che alcuni ordinali "assorbono" le somme a sinistra con ordinali più piccoli di loro. L'esempio fondamentale è fornito da ω perché, come abbiamo già più volte osservato, per ogni $n < \omega$ si ha $n + \omega = \omega$. Il prossimo risultato afferma che questi fenomeni di assorbimento a sinistra si verificano per tutti e soli gli ordinali che sono potenze di ω.

Proposizione 1.21. *Per ogni ordinale* $\alpha > 0$*, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) α *è additivamente chiuso, cioè se* $\beta, \gamma < \alpha$ *allora anche* $\beta + \gamma < \alpha$ *;*
(2) α *assorbe additivamente a sinistra, cioè per ogni* $\beta < \alpha$*, si ha* $\beta + \alpha = \alpha$ *;*
(3) *Esiste* δ *tale che* $\alpha = \omega^\delta$.

Dim. (2) $\Rightarrow$ (1). Se $\beta, \gamma < \alpha$, banalmente $\beta + \gamma < \beta + \alpha = \alpha$ per ipotesi.

(1) $\Rightarrow$ (3). Procediamo per assurdo, mostrando che per ogni ordinale fissato δ, se $\omega^\delta < \alpha < \omega^{\delta+1}$ allora α *non* è additivamente chiuso. Visto che $\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega = \sup_{n<\omega} \omega^\delta \cdot n$, è facile verificare che l'intervallo aperto di estremi ω^δ e $\omega^{\delta+1}$:

$$(\omega^\delta, \omega^{\delta+1}) = \bigcup_{n \geq 1} (\omega^\delta \cdot n, \omega^\delta \cdot (n+1)]$$

è unione di intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Quindi esiste $n \geq 1$ con $\omega^\delta \cdot n < \alpha \leq \omega^\delta \cdot (n+1)$. Ma allora $\omega^\delta, \omega^\delta \cdot n < \alpha$, mentre

$$\omega^\delta + \omega^\delta \cdot n \ = \ \omega^\delta \cdot (n+1) \ \geq \ \alpha,$$

contro l'ipotesi (1).

(3) $\Rightarrow$ (2). Fissiamo $\beta < \alpha = \omega^\delta$. Distinguiamo tre casi. Se $\delta = 0$, allora $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, dunque banalmente $\beta + \alpha = \alpha$. Se $\delta = \zeta + 1$ è successore, da $\beta < \omega^{\zeta+1} = \omega^\zeta \cdot \omega = \sup_{n<\omega} \omega^\zeta \cdot n$ segue che $\beta < \omega^\zeta \cdot n$ per qualche $n < \omega$. Allora deve essere $\beta + \alpha = \alpha$, in quanto

$$\alpha \leq \beta + \alpha = \beta + \omega^{\zeta+1} \leq \omega^\zeta \cdot n + \omega^\zeta \cdot \omega = \omega^\zeta(n + \omega) = \omega^\zeta \cdot \omega = \alpha.$$

(Qua abbiamo usato la proprietà $n + \omega = \omega$ per ogni $n < \omega$. Più in generale, si può dimostrare che $n + \alpha = \alpha$ per ogni ordinale infinito α.)

Se $\delta = \lambda$ è limite, $\beta < \alpha \Rightarrow \beta < \omega^\gamma$ per qualche $\gamma < \lambda$. Per il Teorema della differenza, esiste $\xi > 0$ tale che $\gamma + \xi = \lambda$, e quindi

$$\alpha \ \leq \ \beta + \alpha \ = \ \beta + \omega^\lambda \ \leq \ \omega^\gamma + \omega^\lambda \ = \ \omega^\gamma \cdot (1 + \omega^\xi) \ = \ \omega^\gamma \cdot \omega^\xi \ = \ \omega^\lambda \ = \ \alpha.$$

Notiamo che ω^ξ è un ordinale infinito perché $\xi > 0$, e quindi $1 + \omega^\xi = \omega^\xi$. □

Il prossimo risultato è l'analogo moltiplicativo della proposizione precedente.

Proposizione 1.22. *Per ogni ordinale infinito* α*, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) α *è moltiplicativamente chiuso, cioè se* $\beta, \gamma < \alpha$ *allora anche* $\beta \cdot \gamma < \alpha$ *;*
(2) α *assorbe moltiplicativamente a sinistra, cioè per ogni* $0 < \beta < \alpha$*, si ha* $\beta \cdot \alpha = \alpha$ *;*

(3) *Esiste* δ *tale che* $\alpha = \omega^{(\omega^\delta)}$.

Dim. La dimostrazione è del tutto simile a quella della proposizione precedente.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se $\beta = 0$, la tesi è banale. Se $\beta > 0$ e $\beta, \gamma < \alpha$, banalmente $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha$ e per ipotesi sappiamo che $\beta \cdot \alpha = \alpha$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Notiamo prima che per ogni ordinale infinito α esiste un ordinale δ tale che $\omega^{(\omega^\delta)} \leq \alpha < \omega^{(\omega^{\delta+1})}$. (La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Proposizione **??**.) Per raggiungere la tesi, mostriamo che per ogni δ, se $\omega^{(\omega^\delta)} < \alpha < \omega^{(\omega^{\delta+1})}$, allora α *non* è moltiplicativamente chiuso.

Visto che $\omega^{(\omega^{\delta+1})} = \omega^{(\omega^\delta)\cdot\omega} = \sup_{n<\omega} \omega^{(\omega^\delta \cdot n)}$, possiamo prendere $1 \leq n < \omega$ con $\omega^{(\omega^\delta \cdot n)} < \alpha \leq \omega^{(\omega^\delta \cdot (n+1))}$. Ma allora:

$$\omega^{(\omega^\delta \cdot n)} \cdot \omega^{(\omega^\delta)} = \omega^{(\omega^\delta \cdot n + \omega^\delta)} = \omega^{(\omega^\delta \cdot (n+1))} \geq \alpha,$$

e quindi α *non* è moltiplicativamente chiuso.

(3) $\Rightarrow$ (2). Sia $\beta < \alpha = \omega^{(\omega^\delta)}$. Distinguiamo tre casi. Se $\delta = 0$, allora $\alpha = \omega$ e $\beta < \omega$ è un numero naturale, ed abbiamo già osservato che $n \cdot \omega = \omega$ per ogni $n \in \omega$. Se $\delta = \eta + 1$ è successore, da $\beta < \omega^{(\omega^{\eta+1})} = \omega^{(\omega^\eta \cdot \omega)} = (\omega^{(\omega^\eta)})^\omega = \sup_{n<\omega} (\omega^{(\omega^\eta)})^n$ segue che $\beta < (\omega^{(\omega^\eta)})^n = \omega^{(\omega^\eta \cdot n)}$ per qualche $n < \omega$. Allora deve essere $\beta \cdot \alpha = \alpha$, in quanto

$$\alpha \leq \beta \cdot \alpha = \beta \cdot \omega^{(\omega^{\eta+1})} \leq \omega^{(\omega^\eta \cdot n)} \cdot \omega^{(\omega^\eta \cdot \omega)} = \\ = \omega^{(\omega^\eta \cdot n + \omega^\eta \cdot \omega)} = \omega^{(\omega^\eta \cdot (n+\omega))} = \omega^{(\omega^\eta \cdot \omega)} = \omega^{(\omega^{\eta+1})} = \alpha.$$

Infine, se $\delta = \lambda$ è limite, $\alpha = \omega^{(\omega^\lambda)} = \sup_{\xi < \omega^\lambda} \omega^\xi = \sup_{\gamma<\lambda} \omega^{(\omega^\gamma)}$ e quindi $\beta < \alpha \Rightarrow \beta < \omega^{(\omega^\gamma)}$ per qualche $\gamma < \lambda$. Allora abbiamo che

$$\alpha \leq \beta \cdot \alpha \leq \omega^{(\omega^\gamma)} \cdot \omega^{(\omega^\lambda)} = \omega^{(\omega^\gamma + \omega^\lambda)} = \omega^{(\omega^\lambda)} = \alpha.$$

Notiamo che ω^λ è additivamente chiuso per la proposizione precedente, e quindi $\omega^\gamma + \omega^\lambda = \omega^\lambda$ per ogni $\gamma < \lambda$. $\square$