ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
Dispensa 1

Mauro Di Nasso

Ultimo aggiornamento: October 21, 2024

Introduzione

Scopo di questo corso è introdurre i primi elementi fondamentali della *teoria degli insiemi*. Questa disciplina riveste un ruolo del tutto speciale. Molti dei suoi aspetti possono essere presentati come si farebbe in un qualsiasi altro corso di matematica, ma la sua particolare importanza sta nel suo cruciale ruolo *fondazionale*. Infatti, al suo interno può essere formalizzata virtualmente tutta la matematica, in accordo col cosiddetto *programma riduzionista* il cui scopo è quello di ridurre ogni nozione matematica al concetto primitivo di insieme. La presentazione e la discussione di questo ruolo fondazionale servirà anche come introduzione ai concetti fondamentali della *logica matematica*.

Nelle prime lezioni del corso ci muoveremo all'interno della cosiddetta teoria *intuitiva* degli insiemi. Assumeremo come "intuitivamente validi" i principi di *estensionalità* e *comprensione*, che risultano coerenti con la consueta pratica matematica, e ne dedurremo alcuni primi risultati sulla cardinalità. Questa introduzione ci sarà utile per familiarizzare con alcuni concetti importanti, che verranno poi ripresi e sviluppati con maggiore rigore nel seguito. In questa prima parte saranno anche presentati alcuni *paradossi* che storicamente evidenziarono la contraddittorietà di questo modo di procedere. La crisi che ne seguì durante gli anni a cavallo del 1900, portò alla formulazione di *teorie assiomatiche degli insiemi*, il cui ambizioso scopo era quello di rifondare su basi rigorose l'intera matematica.

Dopo questa breve parte introduttiva, tutto il resto del corso sarà proprio dedicato allo sviluppo sistematico di una di quelle teorie, cioè la teoria ZFC di Zermelo-Fraenkel con scelta, che è quella attualmente più usata. Introdurremo anche la teoria delle classi GB di Gödel-Bernays, che risulterà più conveniente per trattare alcune parti del programma, in particolare la ricorsione transfinita. Attenendoci al metodo assiomatico, tutte le nozioni e i risultati presentati verranno giustificati rigorosamente a partire da una iniziale lista di principi, cioè gli assiomi, che saranno gli unici ad essere assunti come validi.

Nella parte finale del corso, introdurremo la nozione di *modello della teoria degli insiemi*, e saremo in grado di dare un significato preciso ad affermazioni del tipo: "il Teorema di Hahn-Banach *non è dimostrabile* senza l'assioma di scelta", oppure "l'ipotesi del continuo è *indipendente* dai principi della matematica".

CHAPTER 1

Il linguaggio degli insiemi

1. Simboli logici

In questo corso faremo un massiccio uso di “formule”, un po’ più di quanto sia consuetudine fare in altri settori della matematica. In realtà, uno dei primi compiti della logica matematica è quello di fornire una precisa e rigorosa definizione di *formula*, ma di questo ci occuperemo solo più avanti. Per il momento sarà sufficiente seguire l’uso comune, prestando però una particolare attenzione ai seguenti *simboli logici*, che useremo sistematicamente.

Definizione 1.1. Per *simboli logici* intendiamo i seguenti simboli:

- *Connettivi*:
  negazione: $\neg$ (“non”); congiunzione: $\wedge$ (“e”); disgiunzione: $\vee$ (“o”); implicazione: $\rightarrow$ (“se ... allora”); equivalenza: $\leftrightarrow$ (“se e solo se”).
- *Variabili*:
  $x, y, z, t, \ \ldots\ , x_1, x_2, x_3 \ldots$
- *Quantificatori*:
  esistenziale $\exists$ (“esiste”); universale $\forall$ (“per ogni”).

Il significato di questi simboli può sembrare evidente, ma un loro uso corretto richiederà qualche cautela. Cominciamo con i connettivi.

Definizione 1.2. Siano P e Q enunciati, cioè affermazioni cui si possa attribuire uno ed uno solo dei valori di verità *vero* o *falso*. Allora:

- $\neg P$ è vera quando P è falsa, ed è falsa quando P è vera;
- $P \wedge Q$ è vera quando sia P che Q sono vere, ed è falsa altrimenti;
- $P \vee Q$ è falsa quando sia P che Q sono false, ed è vera altrimenti;
- $P \rightarrow Q$ è falsa quando l’*ipotesi* (o *premessa*) P è vera e la *tesi* (o *conseguenza*) Q è falsa, ed è vera negli altri casi;
- $P \leftrightarrow Q$ è vera quando P e Q hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere o entrambe false), ed è falsa altrimenti.

Allo scopo di visualizzare queste definizioni, è consuetudine usare le cosiddette *tavole di verità*. In queste, viene indicato il valore di verità “V” (vero) o “F” (falso) degli enunciati ottenuti usando i vari connettivi, a partire dai possibili valori di verità degli enunciati P e Q di partenza.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Per giungere a definizioni precise, sono state fatte delle scelte non sempre in accordo con il *linguaggio naturale*, cioè con il comune linguaggio di tutti i giorni. Ad esempio la disgiunzione $\vee$ ("o") è *inclusiva*, cioè $P \vee Q$ è vera anche nel caso in cui P e Q siano entrambe vere.[1] Un altro caso non pienamente corrispondente all'uso comune è quello in cui accettiamo come vera l'implicazione $P \to Q$ anche quando P è falsa e Q è vera. Tuttavia le definizioni date sono in pieno accordo con la pratica, come avremo modo di vedere con diversi esempi. Ad esempio, in matematica un enunciato $P \to Q$ viene considerato vero "d'ufficio" nel caso in cui P sia falso.[2]

Utilizzando ripetutamente i vari connettivi, si possono formare nuovi *enunciati composti* a partire da enunciati assegnati, che chiamiamo *enunciati atomici*. A partire dai valori di verità degli enunciati atomici, si attribuisce un valore di verità a tutti gli enunciati composti. Quando due enunciati composti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno la stessa tavola di verità, diremo che sono *logicamente equivalenti*, e scriveremo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. In questo caso attribuiremo ad $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ lo stesso significato e quindi – a seconda della convenienza – potremo sostituire uno all'altro in ogni ragionamento. Nel prossimo esercizio sono raccolte le equivalenze logiche più usate nella pratica.

Esercizio 1.3. Verificare che le seguenti coppie di enunciati composti (a partire dagli enunciati atomici P e Q) hanno la stessa tavola di verità:

(1) Doppia negazione: $\neg(\neg P) \equiv P$.
(2) Leggi di De Morgan:
   - $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
   - $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
(3) Negazione dell'implicazione: $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.
(4) Contronominale: $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$.
(5) Doppia implicazione: $P \leftrightarrow Q \equiv ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$.
(6) Negazione della doppia implicazione: $\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

Quasi sempre negli enunciati matematici si fa uso di *quantificazioni* su variabili; precisamente si usano *quantificatori esistenziali* $\exists x$ ("esiste x") e *quantificatori universali* $\forall x$ ("per ogni x"). Il loro significato verrà assunto come evidente. Di particolare importanza è il comportamento rispetto alla negazione, che ricordiamo qua sotto.

Scriviamo "$P(x)$" per indicare che "l'oggetto x soddisfa la proprietà P", e scriviamo $Q(x, y)$ per indicare che "la coppia (x, y) soddisfa la proprietà Q". Allora:

- "$\neg(\forall x\, P(x))$" è logicamente equivalente a "$\exists x\, \neg P(x)$";
- "$\neg(\exists x\, P(x))$" è logicamente equivalente a "$\forall x\, \neg P(x)$".
- "$\neg(\forall x\, \forall y\, Q(x, y))$" è logicamente equivalente a "$\exists x\, \exists y\, \neg Q(x, y)$".
- "$\neg(\exists x\, \exists y\, Q(x, y))$" è logicamente equivalente a "$\forall x\, \forall y\, \neg Q(x, y)$".
- "$\neg(\forall x\, \exists y\, Q(x, y))$" è logicamente equivalente a "$\exists x\, \forall y\, \neg Q(x, y)$".
- "$\neg(\exists x\, \forall y\, Q(x, y))$" è logicamente equivalente a "$\forall x\, \exists y\, \neg Q(x, y)$".

[1] È interessante il fatto che questa ambiguità di significato che la disgiunzione ha in italiano, non sussisteva invece nel latino. In quella lingua si usavano infatti due congiunzioni diverse: "*vel*" per denotare la "o" inclusiva (quella corrispondente al nostro connettivo $\vee$), e "*aut*" per la disgiunzione esclusiva, dove P *aut* Q è falsa quando P e Q sono entrambe vere.

[2] L'enunciato "*Se B è uno spazio di Banach non separabile di dimensione finita, allora B è compatto*" è vero, per il semplice fatto che *non* esistono spazi di Banach non separabili di dimensione finita.

Per memorizzare le equivalenze di sopra può essere utile pensare che in ogni enunciato il connettivo della negazione $\neg$ può "passare attraverso" i quantificatori scambiando $\exists$ con $\forall$ e viceversa, mantenendo l'equivalenza logica. In modo informale, possiamo scrivere:

$$\neg\exists \;\equiv\; \forall\neg \quad \text{e} \quad \neg\forall \;\equiv\; \exists\neg$$

Esempio 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale. La proprietà "f è continua su $\mathbb{R}$" è espressa dalla seguente formula:

$$\forall x_0\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

La proprietà "f *non* è continua su $\mathbb{R}$" è la negazione della precedente. Facendo "passare la negazione attraverso i quantificatori", otteniamo la seguente formula equivalente:

$$\exists x_0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ \neg\,(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

che è a sua volta è equivalente alla formula:

$$\exists x_0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

2. I tre principi della teoria intuitiva degli insiemi

Dopo questo breve preambolo sui simboli logici, passiamo ad occuparci finalmente degli insiemi, sui quali è incentrato tutto questo corso. Non definiremo cosa sia un insieme, perché si tratta di una nozione primitiva non riconducibile ad altri concetti più elementari. Informalmente, sarà sufficiente pensare ad un *insieme* come ad una collezione di oggetti, priva di ogni struttura. Quegli oggetti a che costituiscono un insieme A si dicono i suoi *elementi*. In questo caso si scrive "$a \in A$", che si legge: "a appartiene ad A" oppure "A contiene a".

Per lo sviluppo di questa prima parte intuitiva di teoria degli insiemi, ci atterremo ai seguenti tre principi informali, ognuno dei quali sarà ripresentato in forma precisa e rigorosa più avanti nel corso.

> **Principio del Linguaggio.** Ogni proprietà che consideriamo deve essere esprimibile nel *linguaggio della teoria degli insiemi*, cioè deve poter essere scritta come formula nella quale compaiono soltanto i simboli logici, il simbolo di uguaglianza "=", e il simbolo di appartenenza "$\in$".[3]

In altre parole, in base a questo principio possiamo identificare le *proprietà insiemistiche* con opportune *formule*.

Notazione 2.1. Scriviamo "$A \neq B$" per intendere la formula "$\neg(A = B)$", e scriviamo "$A \notin B$" per intendere "$\neg(A \in B)$".

L'intuizione che un insieme è completamente determinato dai suoi elementi è racchiusa nel seguente principio.

> **Principio di Estensionalità.** Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, cioè:
>
> $$\forall A\ \forall B\ [\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B].$$

[3] Naturalmente, resta inteso che nella scrittura delle formule possiamo anche usare parentesi.

Osserviamo che – grazie a questo principio – potremmo anche fare a meno del simbolo di uguaglianza. Infatti, potremmo sostituire ogni formula "$A = B$" con la formula equivalente "$\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$".

Una fondamentale intuizione nella pratica matematica riguarda la possibilità di formare un insieme a partire da ogni assegnata proprietà. Precisamente, nella pratica sembra evidente che l'*estensione* di una proprietà, cioè la collezione di tutti gli oggetti che la soddisfano, formi un insieme. A questo corrisponde il terzo principio della teoria intuitiva degli insiemi, che è il seguente.

> **Principio di Comprensione (o di Astrazione).** Se P è una proprietà "ammissibile", allora esiste la sua estensione:
> $$\exists X\ \forall x\,(x \in X \ \leftrightarrow\ P(x)).$$

Cosa intendiamo per "ammissibile" sarà chiarito più avanti nel corso. Per adesso non dobbiamo preoccuparci, tutte le proprietà che si considerano nella comune pratica matematica, e in particolare tutte quelle che incontreremo in queste prime lezioni, saranno "ammissibili". Ad esempio, le proprietà di essere un numero naturale, intero, razionale, reale, complesso, sono tutte "ammissibili";[4] di conseguenza, applicando il principio di comprensione, potremo formare i corrispondenti insiemi dei numeri naturali $\mathbb{N}$, dei numeri interi $\mathbb{Z}$, dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, dei numeri reali $\mathbb{R}$, e dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Osserviamo che l'insieme X nell'enunciato del principio di comprensione è necessariamente unico, in conseguenza del principio di *estensionalità*. Per denotarlo, si scrive:

$$X = \{x \mid P(x)\}.$$

Quando $X = \{x \mid P(x)\}$ è l'estensione della proprietà P, adottiamo le seguenti ovvie notazioni:

- "$x \in X$" denota $P(x)$;
- "$y = X$" denota "$\forall x\ (P(x) \leftrightarrow x \in y)$".
- "$X \in z$" significa "$\exists y\ (y = X \wedge y \in z)$", dove "$y = X$" denota la formula di sopra.

Attenzione! Anche se nei consueti corsi di matematica tutte le proprietà che si usano per formare insiemi sono "ammissibili", è comunque bene sapere che non tutte le proprietà lo sono. L'esempio più famoso, che ha avuto una cruciale importanza nella storia dei fondamenti della matematica, è dato dal celebre *paradosso di Russell.* Consideriamo la proprietà P di *non* essere elemento di se stesso. Notiamo subito che P soddisfa il principio del *linguaggio*, perché $P(x)$ si scrive "$x \notin x$". Ad esempio, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali soddisfa P perchè $\mathbb{N}$ *non* è un numero naturale e quindi $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$. Nella lettera originale in cui formulò il suo paradosso, Bertrand Russell menzionò l'insieme delle *non-teiere* come esempio di insieme che non soddisfa P, visto che l'insieme delle non-teiere certamente è una non-teiera! Vediamo ora che l'estensione della proprietà P non può essere un insieme. Infatti, supponiamo per assurdo che esista l'insieme $R = \{x \mid x \notin x\}$. Si hanno due casi. Se $R \in R$, allora R stesso è uno di quegli insiemi che non appartengono a se stessi, e quindi $R \notin R$. Se invece $R \notin R$, allora non è vero che R non appartiene a se

[4] Anche se può sembrare strano, vedremo più avanti che anche queste proprietà soddisfano il principio del linguaggio, cioè sono esprimibili da formule che contengono soltanto simboli logici e i simboli di uguaglianza e di appartenenza.

stesso, e quindi $R \in R$. In entrambi i casi otteniamo un assurdo; dobbiamo così concludere che R non può essere un insieme, e "$x \notin x$" non può essere una proprietà "ammissibile"! Più avanti vedremo che neppure la banale proprietà "$x = x$" è "ammissibile", perchè ammettere l'esistenza della sua *estensione*, cioè dell'insieme universale di tutti gli insiemi $V = \{x \mid x = x\}$, porta a contraddizioni.[5]

3. Alcune notazioni fondamentali

Nel caso di alcune proprietà particolarmente importanti, fisseremo una volta per tutte delle particolari scritture per denotare i corrispondenti insiemi che si ottengono per estensione. È bene chiarire che si tratta di scritture *metalinguistiche*, cioè scritture contenenti simboli esterni al linguaggio. Il primo semplice esempio è il seguente.

NOTAZIONE 3.1. Con la scrittura "$\emptyset$" denotiamo l'insieme $\{x \mid x \neq x\}$.

Visto che "$x \neq x$" è chiaramente una proprietà che non è verificata da alcun x, l'insieme "$\emptyset$" si chiama *insieme vuoto*. Notiamo che, in conseguenza del principio di *estensionalità*, $\emptyset$ è l'unico insieme senza elementi.

Più formalmente, ciò che faremo è usare "$\emptyset$" come utile abbreviazione metalinguistica (cioè fuori dal linguaggio formale). Precisamente, conveniamo che:

NOTAZIONE 3.2.
- Con la scrittura "$A = \emptyset$" denotiamo la proprietà: "$\forall t\ (t \in A \leftrightarrow t \neq t)$".
- Con la scrittura "$A \in \emptyset$" denotiamo la proprietà: "$A \neq A$".
- Con la scrittura "$\emptyset \in A$" denotiamo la proprietà: "$\exists t\ (t = \emptyset) \wedge t \in A$", fove "$t = \emptyset$" è a sua volta l'abbreviazione di una formula, come indicato sopra.

ESERCIZIO 3.3. Verificare che la proprietà denotata dalla scrittura "$A \neq \emptyset$" equivale alla proprietà "$\exists t\,(t \in A)$".

Un'altra notazione comunemente usata è la seguente:

NOTAZIONE 3.4. Siano fissati $a_1, \ldots, a_n$. Scrivendo "$\{a_1, \ldots, a_n\}$" denotiamo l'insieme $\{x \mid (x = a_1) \vee \ldots \vee (x = a_n)\}$ i cui elementi sono tutti e soli gli a_i.

Dunque:
- "$t \in \{a_1, \ldots, a_n\}$" è una notazione per "$t = a_1 \vee \ldots \vee t = a_n$".
- "$t = \{a_1, \ldots, a_n\}$" sta per "$\forall x\,\big(x \in t \leftrightarrow (t = a_1 \vee \ldots \vee t = a_n)\big)$".
- "$\{a_1, \ldots, a_n\} \in t$" sta per "$\exists x\,(x \in t\ \wedge\ x = \{a_1, \ldots, a_n\})$", dove la scrittura "$x = \{a_1, \ldots, a_n\}$" è a sua volta l'abbreviazione di una formula, come indicato sopra.

In generale, se denotiamo con $A_{a_1,\ldots,a_n} = \{x \mid \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$ dove φ è una formula del linguaggio della teoria degli insiemi, allora conveniamo che
- "$t \in A_{a_1,\ldots,a_n}$" è una notazione per "$\varphi(t, a_1, \ldots, a_n)$".
- "$t = A_{a_1,\ldots,a_n}$" sta per "$\forall x\,\big(x \in t \leftrightarrow \varphi(t, a_1, \ldots, a_n)\big)$".
- "$A_{a_1,\ldots,a_n} \in t$" sta per "$\exists x\,(x \in t \wedge \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$".

[5] Si osservi che se V fosse un insieme, si avrebbe $V \in V$ e quindi $V \notin R$.

Introduciamo ora altre notazioni molto familiari, corrispondenti a proprietà "ammissibili" che si riferiscono ad insiemi assegnati A, B.

Notazione 3.5. Siano A e B insiemi assegnati. Allora

- La scrittura "$A \cup B$" denota l'insieme $\{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$, che viene chiamato l'*unione* di A e B;
- La scrittura "$A \cap B$" denota l'insieme $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$, chiamato l'*intersezione* di A e B;
- La scrittura "$A \setminus B$" denota l'insieme $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, chiamato la *differenza insiemistica* di A e B, o il *complemento relativo* di B in A.
- La scrittura "$A \triangle B$" denota l'insieme $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, chiamato la *differenza simmetrica* di A e B.

Dunque, l'unione è il corrispettivo insiemistico della disgiunzione inclusiva "$\vee$", e l'intersezione corrisponde alla congiunzione "$\wedge$".[6]

Esercizio 3.6. Verificare le seguenti uguaglianze:

(1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
(2) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
(3) $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$.

Seguendo il principio del *linguaggio*, anche le proprietà insiemistiche più semplici dovranno essere espresse da formule.

Definizione 3.7. Siano A e B insiemi. Diciamo che A è *sottoinsieme* di B (o che A è *incluso* in B) se vale la proprietà: "$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$". In questo caso scriviamo "$A \subseteq B$".

Dunque per noi "$A \subseteq B$" è una scrittura *metalinguistica*, cioè non appartenente al linguaggio, che però verrà usata come comoda abbreviazione per indicare la formula di sopra.

Usando la notazione di sottoinsieme, il principio di *estensionalità* può essere riscritto così:

$$\forall A \forall B\, [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)] \leftrightarrow A = B.$$

In effetti, nella pratica, per dimostrare che due insiemi A e B sono uguali si verificano separatamente le due inclusioni $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Se $X = \{x \mid P(x)\}$ è l'insieme *estensione* di una proprietà P, e Y è un insieme, allora:

- "$Y \subseteq X$" significa "$\forall x\ (x \in Y \to P(x))$".
- "$X \subseteq Y$" significa "$\forall x\ (P(x) \to x \in Y)$".

Per ogni insieme A, vale banalmente l'inclusione "$\emptyset \subseteq A$". Infatti, la corrispondente formula "$\forall x\, (x \in \emptyset \to x \in A)$", cioè "$\forall x\, (x \neq x \to x \in A)$", è banalmente vera perché per ogni x si ha un'implicazione dove la premessa è falsa.

Notazione 3.8. La scrittura "$\mathcal{P}(A)$" denota l'insieme $\{X \mid X \subseteq A\}$, che è chiamato l'*insieme potenza* o l'*insieme delle parti* di A.

[6] Non è un caso che i simboli $\cup$ e $\vee$, e simboli $\cap$ e $\wedge$, siano molto simili.

Elenchiamo qui di seguito altre comode abbreviazioni che si usano molto nella pratica.

NOTAZIONE 3.9.

- Scrivendo "$\{x \in A \mid P(x)\}$" intendiamo $\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$;
- Scrivendo "$\forall\, x \in A\ P(x)$" intendiamo "$\forall x\ (x \in A \to P(x))$" ;
- Scrivendo "$\exists\, x \in A\ P(x)$" intendiamo "$\exists x\ (x \in A \wedge P(x))$".
- Scrivendo "$\exists! x\ P(x)$", che si legge: "esiste ed unico x tale che $P(x)$", intendiamo "$\exists x\ \big(P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \to y = x)\big)$".

4. Coppie ordinate

Una conseguenza del principio di *estensionalità* è l'impossibilità dell'esistenza di *atomi*, cioè di oggetti matematici che non siano insiemi. Osserviamo infatti che ognuno di questi atomi – in quanto privo di elementi – dovrebbe coincidere con l'*insieme vuoto*. Non c'è dubbio che questo contrasta con la pratica matematica. Ad esempio, i numeri e le coppie ordinate sono usualmente pensati come atomi e non come insiemi: è ben raro trovare un matematico che pensi al numero "pi greco" π come ad un insieme!

In questo corso svilupperemo una *teoria pura degli insiemi*, cioè assumeremo che tutti gli oggetti con cui avremo a che fare siano insiemi, compresi i numeri e le coppie ordinate. In particolare, gli elementi di insiemi saranno a loro volta insiemi, e quindi il nostro campo d'azione sarà ristretto alle *famiglie di insiemi*, per usare un termine dell'ordinario linguaggio matematico. Come vedremo, limitarsi agli *insiemi puri* è però una restrizione più apparente che reale. Uno degli scopi fondazionali della teoria degli insiemi è infatti proprio quello di mostrare come virtualmente *tutti* gli oggetti matematici, numeri compresi, possono essere "codificati" (cioè definiti) come particolari insiemi. Il primo esempio fondamentale che vedremo è quello di coppia ordinata.

Il concetto di coppia ordinata consiste nell'assegnare in modo "ordinato" due elementi (non necessariamente distinti), detti *componenti* o *coordinate*. Si usa la notazione (a, b) per indicare che a è la prima componente, e b la seconda.

La nozione di coppia ordinata potrebbe essere considerata come una nuova nozione primitiva, intuitivamente evidente, da aggiungere alla nozione primitiva di insieme. Ma il nostro scopo qui è quello di ricondurre ogni nozione matematica alla nozione di insieme. Con la prossima definizione, vedremo infatti che anche le coppie ordinate possono essere "codificate" da opportuni insiemi.

DEFINIZIONE 4.1. Chiamiamo *coppia ordinata* di prima componente a e seconda componente b, il seguente insieme, detto *coppia di Kuratowski*:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

ESERCIZIO 4.2. Scrivere per esteso due formule $\varphi(X, a, b)$ e $\psi(X)$ della teoria degli insiemi che corrispondono rispettivamente alle proprietà: "X è la coppia ordinata (a, b)" e "X è una coppia ordinata".

A prima vista, quella di sopra può sembrare una definizione piuttosto bizzarra, ma ciò che importa è che essa raggiunga lo scopo, realizzando tutte le proprietà richieste. Abbiamo infatti:

Proposizione 4.3.

(1) *Se (a, b) è una coppia ordinata, allora la prima componente a è quell'unico elemento tale che $a \in x$ per ogni $x \in (a, b)$.*
(2) *Se $(a, b) = (a', b')$ allora $a = a'$.*
(3) *Se $(a, b) = (a, b')$ allora $b = b'$.*
(4) *$(a, b) = (a', b')$ se e solo se $a = a'$ e $b = b'$.*

Proof. (1). Se $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ è una coppia ordinata, allora l'intersezione dei suoi elementi $\bigcap_{x\in(a,b)} x = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$ ha come unico elemento la prima componente a.

(2). Se $(a, b) = (a', b')$ allora, per la (1), $\{a\} = \bigcap_{x\in(a,b)} x = \bigcap_{y\in(a',b')} y = \{a'\}$, e quindi $a = a'$.

(3). Supponiamo che $(a, b) = (a, b')$. Se $a = b$, allora $\{\{a\}, \{a, b'\}\} = (a, b') = (a, b) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\} \Rightarrow \{a, b'\} = \{a\} \Rightarrow b' = a$, e quindi le seconde componenti $b = b'$ sono uguali perché entrambe uguali ad a. Assumiamo ora che $a \neq b$. Visto che $\{a, b\} \in (a, b) = (a, b')$, deve essere $\{a, b\} = \{a\}$ o $\{a, b\} = \{a, b'\}$. Il primo caso è impossibile perché si avrebbe $b \in \{a\}$ e quindi $b = a$, contro l'ipotesi. Allora abbiamo che $\{a, b\} = \{a, b'\} \Rightarrow b \in \{a, b'\} \Rightarrow b = b'$, visto che $b \neq a$.

(4). Basta mettere insieme le proprietà (2) e (3) di sopra. □

A partire dalla nozione di coppia ordinata, si definiscono poi le triple ordinate ponendo $(a, b, c) = ((a, b), c)$, le quadruple ordinate $(a, b, c, d) = ((a, b, c), d)$, e così via.

Esercizio 4.4. Consideriamo le seguenti definizioni alternative di coppia ordinata:[7]

(1) $(a, b)_1 := \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$ (Hausdorff 1914);
(2) $(a, b)_2 := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$ (Wiener 1914);
(3) $(a, b)_3 := \{\{a\}, \{b, \emptyset\}\}$ (Quine).
(4) $(a, b)_4 := \{a, \{b\}\}$.

Dimostrare che le prime tre soddisfano la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate, cioè per $i = 1, 2, 3$:

- $(a, b)_i = (a', b')_i \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$ per ogni a, a', b, b'.

Dimostrare che invece $(a, b)_4$ non soddisfa la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate.

Esercizio 4.5. Consideriamo le seguente definizione alternativa di coppia ordinata:

- $(a, b)_* = \{a, \{a, b\}\}$.

[7] Vedi: A. Oberschelp, On pairs and tuples, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 37 (1991), 55–56. Vedi anche Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, p. 236 (Exercise 4.8)

Assumendo che non esistano cicli di appartenenza $x \in y \in x$, dimostrare che $(a,b)_*$ soddisfa la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate.

Dimostrare che invece, assumendo l'esistenza di opportuni cicli di appartenenza, $(a,b)_*$ non soddisfa la proprietà caratterizzante delle coppie ordinate.

Definizione 4.6. Il *prodotto cartesiano* di A con B, denotato $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie ordinate la cui prima componente appartiene ad A e la cui seconda componente appartiene a B. In formule:

$$A \times B = \{x \mid \exists\, a \in A\ \exists\, b \in B\ x = (a,b)\}$$

Strettamente parlando, questa operazione di prodotto cartesiano non è associativa, perché in generale $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Coerentemente con la nostra definizione di tripla ordinata $(a,b,c) = ((a,b),c)$, conveniamo che $A \times B \times C = (A \times B) \times C$, e analogamente per prodotti cartesiani di quattro insiemi, *ecc.*

5. Relazioni di equivalenza e d'ordine

A partire dalle coppie ordinate, possiamo definire il concetto di relazione.

Definizione 5.1. Una *relazione binaria* R è un insieme di coppie ordinate.

- L'insieme $\mathrm{dom}(R) = \{a \mid \exists\, b\ (a,b) \in R\}$ di dice *dominio* di R;
- L'insieme $\mathrm{imm}(R) = \{b \mid \exists\, a\ (a,b) \in R\}$ si dice *immagine* di R.

Si dice che R è una *relazione su* A quando $\mathrm{dom}(R), \mathrm{imm}(R) \subseteq A$.

Spesso si scrive $aR\,b$ per intendere che la coppia ordinata (a,b) "soddisfa" la relazione R, cioè $(a,b) \in R$. Ad esempio, con la nostra definizione, la consueta relazione $<$ sui numeri naturali $\mathbb{N}$ è identificata con l'insieme di tutte quelle coppie ordinate (n,m) di numeri naturali dove n è minore di m.

Ricordiamo qui di seguito un altro paio di fondamentali definizioni.

Definizione 5.2. Una *relazione di equivalenza* su un insieme A è una relazione R su A che gode delle proprietà seguenti:

- *Riflessiva*: Per ogni $a \in A$, aRa;
- *Simmetrica*: Per ogni $a, b \in A$, $aRb \to bRa$;
- *Transitiva*: Per ogni $a,b,c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \to aRc$.

Notiamo che la proprietà riflessiva garantisce che $A = \mathrm{dom}(R) = \mathrm{imm}(R)$.

Definizione 5.3. Sia A un insieme, e sia $\approx$ una relazione di equivalenza su A. La *classe di equivalenza* di un elemento $a \in A$ rispetto a $\approx$ è l'insieme:

$$[a] = \{a' \mid a' \approx a\}.$$

L'*insieme quoziente* di A rispetto a $\approx$ è l'insieme di tutte le classi di equivalenza:

$$A/{\approx}\ =\ \{x \mid \exists\, a \in A\ \ x = [a]\}.$$

Notiamo che la scrittura "$x = [a]$" è in realtà una abbreviazione che sta ad indicare la seguente formula nel linguaggio degli insiemi: "$\forall a'\ (a' \in x \leftrightarrow a' \approx a)$".

La nozione di ordine è uno dei temi centrali della matematica. Ricordiamo qui le definizioni.

Definizione 5.4. Un *insieme parzialmente ordinato* è una coppia $(A, \leq)$ dove il *dominio* A è un insieme, e l'*ordine parziale* $\leq$ è una relazione su A che gode delle proprietà seguenti:

- *Riflessiva*: Per ogni $a \in A$, $a \leq a$;
- *Anti-simmetrica*: Per ogni $a, b \in A$, $(a \leq b \wedge b \leq a) \to a = b$;
- *Transitiva*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(a \leq b \wedge b \leq c) \to a \leq c$.

Definizione 5.5. Una relazione $<$ su A è un *ordine parziale stretto* se gode delle proprietà seguenti:

- *Irriflessiva*: Per ogni $a \in A$, $a \not< a$;
- *Asimmetrica*: Per ogni $a, b \in A$, $a < b \to b \not< a$;
- *Transitiva*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(a < b \wedge b < c) \to a < c$.

Osserviamo che la lista con le tre proprietà di sopra è ridondante. Infatti, come si può facilmente verificare, la proprietà irriflessiva segue dalla proprietà asimmetrica, e la proprietà asimmetrica segue dalla congiunzione della proprietà transitiva con la proprietà asimmetrica. Abbiamo comunque lasciato le tre proprietà per maggiore chiarezza.

Le nozioni di ordine parziale e di ordine parziale stretto sono sostanzialmente equivalenti, nel senso specificato dall'esercizio qua sotto. Di conseguenza, useremo indifferentemente i simboli $<$ o $\leq$ a seconda della convenienza.

Esercizio 5.6. Sia $\leq$ un ordine parziale su A, e definiamo

$$a \prec b \;\Leftrightarrow\; a \leq b \wedge a \neq b.$$

Allora $\prec$ è un ordine parziale *stretto* su A. Viceversa, se $<$ è un ordine parziale *stretto* su A e definiamo

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; a < b \vee a = b,$$

allora $\preceq$ è un ordine parziale su A.

Con abuso di notazione, quando la cosa non crea confusione, spesso si identifica un insieme parzialmente ordinato $(A, <)$ con il suo dominio A.

Definizione 5.7. Un insieme parzialmente ordinato $(A, <)$ si dice *totalmente ordinato* (o, più semplicemente, *ordinato*) se vale la:

- *Tricotomia*: Per ogni $a, b, c \in A$, vale una delle seguenti tre possibilità:

$$(1)\ a < b; \quad (2)\ a = b; \quad (3)\ b < a$$

In modo equivalente, avremmo potuto richiedere la validità di *una ed una sola* delle tre possibilità di sopra. Vale infatti il seguente risultato:

Esercizio 5.8. Una relazione $<$ è una relazione d'ordine totale stretto su A se e solo se valgono le due proprietà:

(1) *Transitiva*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(a < b \ \wedge\ b < c) \Rightarrow a < c$;
(2) *Tricotomia forte*: Per ogni $a, b, c \in A$, vale *una ed una sola* delle seguenti tre possibilità: $a < b$, $a = b$, $b < a$.

Definizione 5.9. Un insieme totalmente ordinato $(A, <)$ si dice *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto $X \subseteq A$ ha elemento minimo.

Un esempio fondamentale di buon ordine è dato dai numeri naturali $(\mathbb{N}, <)$.

È immediato vedere che non tutti gli ordini totali sono buoni ordini. Ad esempio, l'insieme dei numeri reali $(\mathbb{R}, <)$ non è un buon ordine perché esistono sottoinsiemi non vuoti senza minimo (basta considerare gli intervalli aperti $(a, +\infty)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$).

6. Funzioni

Un altro dei fondamentali concetti primitivi della matematica è quello di funzione. Si può pensare ad una funzione f come ad una "legge" che ad ogni elemento a di un insieme fissato, chiamato dominio di f, associa in modo unico un elemento $f(a)$, chiamato l'immagine di a. Questa è però solo una descrizione informale, che dobbiamo rendere precisa. Grazie alla nozione di coppia ordinata, siamo in grado di definire in modo rigoroso il concetto di funzione come un insieme di tipo speciale.

Definizione 6.1. Una *funzione* f è una relazione *univoca*, cioè una relazione con la proprietà che per ogni elemento $a \in \operatorname{dom}(f)$, esiste un unico b tale che $(a, b) \in f$. Si usa la notazione $f(a) = b$, o anche $f : a \mapsto b$, per intendere che $(a, b) \in f$. In questo caso si dice che b è l'*immagine* di a mediante f, oppure che b è il *valore* assunto da f in a.

Attenzione! Con la nostra definizione, non ha senso parlare di "grafico" di una funzione. Infatti, per noi una funzione f *è* il suo grafico, nel senso che coincide con l'insieme delle coppie ordinate della forma $(x, f(x))$.

La *funzione identità* id_A su un insieme A è la funzione avente come dominio A e tale che $\mathrm{id}_A(a) = a$ per ogni $a \in A$. Quando una funzione assume un solo valore b, essa si dice *funzione costante* di valore b, e si denota c_b.

Notazione 6.2.

- Con la scrittura "$f : A \to B$" si intende che f è una funzione il cui dominio è l'insieme A, e la cui immagine è un sottoinsieme di B. Quando $\operatorname{imm}(f) = B$, si dice che $f : A \to B$ è *suriettiva*.[8]

Esercizio 6.3. Scrivere esplicitamente nel linguaggio degli insiemi la proprietà "$f : A \to B$".

Definizione 6.4. Dato un prodotto cartesiano $A \times B$, le *proiezioni canoniche* $\pi_1 : A \times B \to A$ e $\pi_2 : A \times B \to B$ sono le funzioni definite ponendo $\pi_1(a, b) = a$ e $\pi_2(a, b) = b$ per ogni $(a, b) \in A \times B$.

Viste le proprietà della Proposizione 4.3, le proiezioni canoniche sono effettivamente relazioni univoche.

Ricordiamo ora alcune fondamentali definizioni.

Definizione 6.5. Una funzione f è *iniettiva* quando elementi diversi del dominio hanno immagini diverse. In formula:

$$\forall a, a' \in A \ (a \neq a' \to f(a) \neq f(a')).$$

[8] Nella nostra definizione insiemistica invece il codominio non è specificato, e quindi la nozione di suriettività non ha senso di per sé.

Ricordiamo che ogni implicazione $P \to Q$ è logicamente equivalente alla sua *contronominale* $\neg Q \to \neg P$. Dunque possiamo riformulare l'iniettività in questo modo equivalente, più comodo da usare nella pratica:

$$\forall a, a' \in A\ (f(a) = f(a') \to a = a').$$

DEFINIZIONE 6.6. Una funzione $f : A \to B$ si dice *biunivoca* o *bigezione* se è sia iniettiva che suriettiva.

DEFINIZIONE 6.7. Sia $f : A \to B$, e siano $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- L'*immagine di X mediante f* è l'insieme di tutte le immagini di elementi di X:
$$f[X] := \{y \mid \exists x \in X\ f(x) = y\}.$$
- La *controimmagine di Y mediante f* è l'insieme degli elementi la cui immagine appartiene ad Y:
$$f^{-1}[Y] := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

NOTAZIONE 6.8. Con abuso di notazione, quando non ci sono rischi di fraintendimento, è consuetudine scrivere $f(X)$ per intendere l'insieme immagine $f[X]$. Analogamente, si scrive $f^{-1}(Y)$ per intendere l'insieme controimmagine $f^{-1}[X]$.

ESERCIZIO 6.9. Sia $f : A \to B$ una funzione. Verificare che le seguenti proprietà valgono per ogni $X, X' \subseteq A$ e per ogni $Y, Y' \subseteq B$:

(1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
(2) $Y = f(f^{-1}(Y))$.
(3) $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$.
(4) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$.
(5) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$.
(6) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$.

ESERCIZIO 6.10. Sia $f : A \to B$ una funzione. Dimostrare che valgono le seguenti equivalenze:

(1) f è iniettiva se e solo se $X = f^{-1}(f(X))$ per ogni $X \subseteq A$.
(2) f è suriettiva se e solo se $Y = f(f^{-1}(Y))$ per ogni $Y \subseteq B$.
(3) f è iniettiva se e solo se $f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$ per ogni $X, X' \subseteq A$.
(4) f è iniettiva se e solo se $f(X \setminus X') = f(X) \setminus f(X')$ per ogni $X, X' \subseteq A$.

NOTAZIONE 6.11.

- Data una funzione $f : A \to B$, denotiamo con $\widehat{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ la funzione dove $\widehat{f}(X) = f[X]$ è l'immagine dell'insieme X mediante f.

ESERCIZIO 6.12.

(1) $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se $\widehat{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ è iniettiva.
(2) $f : A \to B$ è suriettiva se e solo se $\widehat{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ è suriettiva.

Soluzione. (1). Se f non è iniettiva, allora esistono $x \neq y$ in A tali che $f(x) = f(y)$. Ma allora $\{x\} \neq \{y\}$ sono sottoinsiemi diversi di A con $\widehat{f}(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = \widehat{f}(\{y\})$, e $\widehat{f}$ non è iniettiva. Viceversa supponiamo che $\widehat{f}(X) = \widehat{f}(Y)$ dove $X \neq Y$ sono sottoinsiemi diversi di A. Prendiamo un elemento x che "testimonia" il fatto che $X \neq Y$, ad esempio prendiamo $x \in X \setminus Y$ (altrimenti, prendiamo $x \in Y \setminus X$ e la dimostrazione non cambia). Allora $f(x) \in \widehat{f}(X) = \widehat{f}(Y)$, dunque esiste $y \in Y$ con $f(x) = f(y)$. Ma per ipotesi $x \notin Y$, dunque $x \neq y$ e perciò f non è iniettiva.

(2). f non suriettiva significa che $\mathrm{imm}(f) \subset B$ è un sottoinsieme proprio di B. Adesso, per ogni $X \subseteq A$, $\widehat{f}(X) \subseteq \mathrm{imm}(f) \subset B$, dunque $\widehat{f}(X) \neq B$ e $\widehat{f}$ non è suriettiva. Viceversa, supponiamo che f sia suriettiva. Per ogni $Y \subseteq B$, sia $X_Y = f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$. Allora è facile verificare che $\widehat{f}(X_Y) = Y$, e questo dimostra la suriettività di $\widehat{f}$. $\square$

Notazione 6.13. Per denotare l'insieme $\{f \mid f : A \to B\}$, si usa la scrittura "$\mathrm{Fun}(A, B)$", o anche "B^A".

Vediamo un paio di esercizi su insiemi di funzioni e ordini.

Esercizio 6.14. Sia $(A, <)$ un insieme ordinato e I un insieme che contiene almeno due elementi. Verificare che il seguente *ordine puntuale* sull'insieme di funzioni $\mathrm{Fun}(I, A)$ è un ordine parziale, ed è un ordine totale se solo se A consiste di un solo punto.

$$f \leq g \iff f(i) \leq g(i) \text{ per ogni } i \in I.$$

In casi particolari, è possibile definire ordini totali su insiemi di funzioni. Un importante esempio è il seguente:

Esercizio 6.15. Verificare che l'ordine della *minima differenza* su $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$:

$$f < g \iff f(k) < g(k) \text{ dove } k = \min\{n \mid f(n) \neq g(n)\}$$

è un ordine totale.

Un'importante classe di funzioni è la seguente:

Definizione 6.16. Dato un insieme X, la *funzione caratteristica* di un suo sottoinsieme $A \subseteq X$ è la funzione $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ tale che

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in A \\ 0 & \textit{se } x \notin A \end{cases}$$

Notiamo che ogni funzione $\chi : X \to \{0, 1\}$ è la funzione caratteristica di uno ed un solo sottoinsieme $A \subseteq X$. Infatti, $\chi = \chi_A$ dove $A = \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$.

Notazione 6.17. In teoria degli insiemi, si denota con $2 = \{0, 1\}$. In particolare, scrivendo 2^X si intende denotare l'insieme di tutte le funzioni $\chi : X \to \{0, 1\}$, cioè l'insieme delle *funzioni caratteristiche* su X.

Definizione 6.18. La *restrizione* di una funzione f ad un sottoinsieme $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$ del suo dominio, è la funzione $f|_X$ avente come dominio X e tale che $f|_X(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

Definizione 6.19. Siano f e g due funzioni con $\mathrm{imm}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. La *composizione* $g \circ f$ è definita ponendo:

$$g \circ f = \{(x, y) \mid \exists z\ f(x) = z \wedge g(z) = y\}.$$

Dunque la composizione $g \circ f$ è quella funzione avente come dominio $\mathrm{dom}(f)$ e tale che $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ per ogni x.

Esercizio 6.20. Verificare le seguenti proprietà:

(1) Siano f e g funzioni con $\mathrm{imm}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. Allora per ogni X si ha che $(g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X))$.
(2) Sia $f : A \to B$. Allora f è iniettiva se e solo se ammette un'*inversa sinistra*, cioè esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$.[9]
(3) $f : A \to B$ è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Definizione 6.21. Una *successione* è una funzione il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Si parla di *I-successione* o *I-sequenza* per indicare una funzione f avente come dominio l'insieme I.

Notazione 6.22. Per indicare una I-sequenza f, si usa spesso la scrittura $(f(i))_{i \in I}$ oppure $(f(i) \mid i \in I)$.

Attenzione! Non confondere la scrittura $(f(i) \mid i \in I)$ con $\{f(i) \mid i \in I\}$. Infatti con la prima si denota la funzione f, mentre con la seconda si denota l'insieme immagine $\mathrm{imm}(f)$. Si tratta di oggetti diversi (ad esempio, funzioni diverse possono avere la stessa immagine), ed è quindi importante tenere distinte le notazioni.

7. Unioni, intersezioni e prodotti infiniti

Notazione 7.1. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi, si denota:[10]

- $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \mid \exists F \in \mathcal{F}\ x \in F\}$.
- $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \mid \forall F \in \mathcal{F}\ x \in F\}$.

Se $\langle F_i \mid i \in I\rangle$ è una sequenza non vuota di insiemi (cioè $I \neq \emptyset$), analogamente a sopra si denota:

- $\bigcup_{i \in I} F_i = \{x \mid \exists i \in I\ x \in F_i\}$.
- $\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \mid \forall i \in I\ x \in F_i\}$.

Come è immediato verificare a partire dalle definizioni, se $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ è l'immagine della sequenza $\langle F_i \mid i \in I\rangle$, allora $\bigcup_{i \in I} F_i = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{F}$ e $\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{F}$.

Esercizio 7.2. Sia $\langle F_i \mid i \in I\rangle$ è una sequenza non vuota di insiemi. Allora

(1) $X \cap \left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I}(X \cap F_i)$.
(2) $X \cup \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I}(X \cup F_i)$.

---

[9] Un'analoga caratterizzazione vale per le funzioni suriettive, ma la vedremo più avanti quando introdurremo l'assioma di scelta (cf. Proposizione 8.1).

[10] Come abbiamo già osservato, visto che stiamo sviluppando una teoria *pura* degli insiemi, per noi tutti gli insiemi sono in realtà famiglie di insiemi. Manteniamo comunque il termine ridondante "famiglia" per seguire l'uso comune.

(3) $X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus F_i)$.
(4) $X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i)$.

Le nozioni di sottoinsieme e di unione si usano anche per insiemi parzialmente ordinati.

Definizione 7.3. Diciamo che l'insieme parzialmente ordinato $(A, <_A)$ è *restrizione* dell'insieme parzialmente ordinato $(B, <_B)$ se $A \subseteq B$, ed inoltre l'ordine su A è quello indotto da B, cioè $a <_A a' \Leftrightarrow a <_B a'$ per ogni $a, a' \in A$.

Chiaramente una restrizione di un insieme totalmente ordinato è totalmente ordinato.

Definizione 7.4. Una famiglia di insiemi parzialmente ordinati $\mathcal{F}$ si dice *catena* se per ogni $(A, <_A), (B, <_B) \in \mathcal{F}$ si ha che $(A, <_A)$ è restrizione di $(B, <_B)$ o viceversa. Chiamiamo *unione* di una catena $\mathcal{F}$ di insiemi parzialmente ordinati, l'insieme parzialmente ordinato $(X, <)$ dove

- Il dominio $X = \bigcup\{A \mid (A, <_A) \in \mathcal{F}\}$ è l'unione di tutti i domini.
- La relazione $< = \bigcup\{<_A \mid (A, <_A) \in \mathcal{F}\}$ è l'unione di tutte le relazioni degli elementi di $\mathcal{F}$, cioè $x < y \Leftrightarrow x <_A y$ per ogni $(A, <_A) \in \mathcal{F}$ tale che $x, y \in A$.

È facile verificare che la relazione di sopra è effettivamente una relazione d'ordine parziale. Inoltre:

Proposizione 7.5. L'unione di una catena di insiemi totalmente ordinati è un insieme totalmente ordinato.

Dim. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia assegnata, e sia $(X, <)$ l'insieme parzialmente ordinato ottenuto come unione. Dati $a, b \in X$, prendiamo $(A, <_A), (B, <_B) \in \mathcal{F}$ tali che $a \in A$ e $b \in B$. Per la compatibilità, possiamo supporre ad esempio che $(A, <_A)$ sia un sottoinsieme di $(B, <_B)$. Allora a, b sono confrontabili in $(B, <_B)$, e quindi nell'unione $(X, <)$. $\square$

Ricordiamo che il prodotto cartesiano di due insiemi $A_1 \times A_2$ era stato definito come l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) dove $a \in A_1$ e $b \in A_2$. Inoltre, avevamo definito $A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$ come l'insieme di tutte le triple ordinate $(a, b, c) = ((a, b), c)$ dove $a \in A_1$, $b \in A_2$ e $c \in A_3$; e così via per tutti i prodotti cartesiani $A_1 \times \ldots \times A_n$ di un numero finito di insiemi.[11] Per definire un prodotto di infiniti insiemi è necessario procedere in modo diverso. Precisamente:

Definizione 7.6. Sia $(A_i)_{i\in I}$ una sequenza di insiemi. Il corrispondente *prodotto* è definito ponendo:

$$\prod_{i\in I} A_i \;=\; \{f \mid f \text{ è una } I\text{-sequenza } \wedge\ \forall i \in I\ f(i) \in A_i\}.$$

In questo caso, ogni elemento $f \in \prod_{i\in I} A_i$ si chiama *I-upla*, e per ogni $i \in I$, l'elemento $f(i) \in A_i$ si dice i-esima *coordinata* della I-upla f.

[11] La formalizzazione di questo procedimento richiede il principio di induzione, che sarà discusso in seguito.

Attenzione! La definizione di sopra non verrà applicata quando I è finito, perché in quel caso si otterrebbe una nozione diversa (anche se simile) a quella già introdotta di *prodotto cartesiano.* Ad esempio, $\prod_{i\in\{1,2\}} A_i \neq A_1 \times A_2$ perchè gli elementi del primo insieme sono funzioni f della forma $f = \{(1,a),(2,b)\}$ dove $a \in A_1$ e $b \in A_2$, mentre gli elementi del secondo insieme sono coppie ordinate (a,b) dove $a \in A_1$ e $b \in A_2$.

8. Assioma di scelta

Può sembrare a prima vista un fatto evidente che quando in una sequenza $(A_i)_{i\in I}$ nessun insieme A_i è vuoto, anche il prodotto $\prod_{i\in I} A_i$ non è vuoto. In effetti, in alcuni casi particolari questa proprietà si può verificare direttamente. Ad esempio, se $I = \{1,\dots,n\}$ è finito, questo segue dalla definizione di insieme non vuoto; ricordiamo infatti che $A_i \neq \emptyset$ significa che esiste un elemento $a_i \in A_i$, e quindi si può formare la I-upla $(a_i)_{i=1,\dots,n} \in \prod_{i=1}^{n} A_i$.[12] Un altro caso è quando tutti gli insiemi $A_i = B$ sono uguali tra loro: per trovare un elemento del prodotto basta prendere un elemento $b \in B$, e considerare la I-upla costante $c_b = (b)_{i\in I}$ con tutte le coordinate uguali a b; chiaramente $c_b \in \prod_{i\in I} B$.

Un esempio più interessante sono i prodotti infiniti $\prod_{i\in I} A_i$ dove gli $A_i \subseteq \mathbb{N}$ sono insiemi non vuoti qualunque di numeri naturali; in questo caso basta definire $f(i) = \min A_i$ ed abbiamo che la I-upla $(f(i))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. Tuttavia – per quanto sorprendente possa sembrare – nel caso generale di sequenze infinite di insiemi non vuoti $(A_i)_{i\in I}$, non c'è modo di dimostrare che $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ a partire dai nostri tre principi. Allo scopo, è necessario assumere un apposito assioma.[13]

> **Assioma di Scelta.** *Se $(A_i)_{i\in I}$ è una sequenza di insiemi non vuoti, allora $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.*

Informalmente, un elemento $f \in \prod_{i\in I} A_i$ è una funzione che "sceglie" un elemento $f(i)$ da ciascun $A_i \neq \emptyset$. Nonostante che la sua validità sembri intuitivamente evidente, l'assioma di scelta ha alcune conseguenze molto bizzarre e controintuitive, e per questo è stato oggetto di lunghe discussioni e forti critiche a cavallo del 1900 e oltre. Oggigiorno, l'assioma di scelta è usato comunemente nella pratica matematica, e riveste un ruolo essenziale in numerose applicazioni.

Vediamone subito alcune utili formulazioni equivalenti (ne vedremo anche altre più avanti nel corso).

TEOREMA 8.1. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*[14]

(1) *Assioma di scelta.*
(2) *Ogni famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti ha una "funzione di scelta", cioè esiste una funzione f tale che $f(F) \in F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$ non vuoto.*

---

[12] L'esistenza di tale I-upla finita segue dal fatto che possiamo scrivere una formula che la descrive, in cui si elencano gli elementi ad uno ad uno. Ovviamente questo non è invece possibile nel caso in cui I sia infinito (ricordiamo che una formula è una stringa *finita* di simboli).

[13] Questa affermazione può essere resa precisa. Infatti se ZF è la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (che introdurremo più avanti), allora si può dimostrare che ZF *non* dimostra l'*assioma di scelta*.

[14] Ciò che in realtà intendiamo qui è che l'equivalenza delle proprietà elencate è dimostrabile a partire dai soli tre principi informali della teoria degli insiemi che stiamo assumendo. Vedremo più avanti che possiamo rendere rigorose queste equivalenze, mostrando come esse siano dimostrabili all'interno della teoria di Zermelo-Fraenkel ZF.

(3) *Ogni insieme* A *ha una "funzione di scelta"* $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ *tale che* $f(B) \in B$ *per ogni* B.
(4) *Ogni famiglia non vuota* $\mathcal{F}$ *di insiemi non vuoti a due a due disgiunti ha un "insieme di scelta", cioè un insieme* X *tale che* $X \cap F = \{x_F\}$ *contiene un unico elemento* x_F *per ogni* $F \in \mathcal{F}$.[15]
(5) *Ogni funzione suriettiva* $f : A \to B$ *ammette un'inversa destra, cioè esiste* $g : B \to A$ *tale che* $f \circ g = id_B$. *(Tale* g *è necessariamente iniettiva.)*

DIM. L'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (2) è immediata. Infatti, se f è una funzione di scelta per la famiglia $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$, allora la I-upla $(f(A_i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Viceversa, data una famiglia di insiemi non vuoti $\mathcal{F}$, ogni $f \in \prod_{F \in \mathcal{F}} F$ è una funzione di scelta per $\mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) è banale.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sia $A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$; notiamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Se $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ è una funzione di scelta per A, visto che gli insiemi in $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti, segue subito che $X = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ è un insieme di scelta per $\mathcal{F}$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Consideriamo la famiglia di insiemi disgiunti $\mathcal{F} = \{\Lambda_b \mid b \in B\}$, dove $\Lambda_b = f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ è la controimmagine di b. Visto che f è suriettiva, ogni $\Lambda_b \neq \emptyset$. Esiste allora un insieme di scelta X per $\mathcal{F}$. Se definiamo $g : B \to A$ ponendo $g(b)$ come l'unico elemento di $X \cap \Lambda_b$, allora chiaramente $f(g(b)) = b$, come volevamo.

(5) $\Rightarrow$ (1). Per ogni $i \in I$ e per ogni $a \in A_i$, poniamo $f(a, i) = A_i$. Otteniamo così una funzione suriettiva $f : \bigcup_{i \in I}(A_i \times \{i\}) \to \mathcal{F}$, dove $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$. Sia adesso $g : \mathcal{F} \to \bigcup_{i \in I}(A_i \times \{i\})$ una inversa destra di f. Questo significa che se $g(A_i) = (b_i, j_i)$ dove $b_i \in A_{j_i}$, allora $A_i = f(g(A_i)) = A_{j_i}$, e quindi $b_i \in A_i$. Concludiamo che $(b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. $\square$

ESERCIZIO 8.2. Dimostrare che l'assioma di scelta AC è equivalente alla seguente proprietà: Per ogni sequenza di insiemi $(F_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J)$, vale l'uguaglianza:[16]

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} F_{i,f(i)}.$$

Per chiarezza, nel seguito marcheremo con la sigla (AC) ogni risultato la cui dimostrazione richiede necessariamente un'applicazione dell'assioma di scelta.[17]

---

[15] La richiesta che gli insiemi di $\mathcal{F}$ siano a due a due disgiunti è necessaria. Ad esempio se $\mathcal{F} = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, un insieme di scelta per $\mathcal{F}$ dovrebbe contenere necessariamente 0 e 1 e quindi non potrebbe intersecare $\{0,1\}$ in un solo elemento.

[16] Ricordiamo che J^I denota l'insieme di tutte le funzioni $f : I \to J$.

[17] Diciamo "necessariamente" per intendere che quei risultati *non* possono essere dimostrati senza l'assioma di scelta. (Con gli strumenti della logica matematica è possibile dimostrare la *non dimostrabilità* di un enunciato a partire da una data lista di assiomi.)