

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Sull'insieme $\mathbb{N}[X]$ dei polinomi a coefficienti in \mathbb{N} si consideri la seguente relazione:

$$P(X) \prec Q(X) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (Q(n) - P(n)) > 0.$$

1. Dimostrare che \prec è un buon ordine.
2. Trovare l'ordinale α tale che $(\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\alpha, \in)$.

Soluzione. L'applicazione $\varphi : \mathbb{N}[X] \rightarrow \omega^\omega$ definita ponendo:

$$\varphi : a_k X^k + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \mapsto \omega^k a_k + \dots + \omega^2 a_2 + \omega a_1 + a_0 \in \omega^\omega$$

è un isomorfismo tra insiemi ordinati $\varphi : (\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\omega^\omega \setminus \{0\}, \in)$, e quindi $(\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\omega^\omega, \in)$; in particolare \prec è un buon ordine su $\mathbb{N}[X]$. Per mostrarlo, osserviamo che

$$a_k X^k + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \prec b_h X^h + \dots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$$

dove $a_k, b_h \neq 0$ se e solo se $k < h$, oppure $k = h$ e $a_k < b_k$, oppure $h = k$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} < b_{k-1}$, oppure \dots , oppure $k = h$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} = b_{k-1}$ e \dots e $a_1 = b_1$ e $a_0 < b_0$. Osserviamo poi che tra i corrispondenti ordinali vale

$$\omega^k a_k + \dots + \omega^2 a_2 + \omega a_1 + a_0 < \omega^h b_h + \dots + \omega^2 b_2 + \omega b_1 + b_0$$

dove $a_k, b_h \neq 0$ se e solo se $k < h$, oppure $k = h$ e $a_k < b_k$, oppure $h = k$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} < b_{k-1}$, oppure \dots , oppure $k = h$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} = b_{k-1}$ e \dots e $a_1 = b_1$ e $a_0 < b_0$. Questo garantisce che per tutti i polinomi $P, Q \in \mathbb{N}[X]$ si ha $P \prec Q \iff \varphi(P) < \varphi(Q)$. Notiamo infine che $\text{Imm}(\varphi) = \omega^\omega \setminus \{0\}$. Infatti se $\alpha < \omega^\omega$ è un ordinale non nullo, allora usando la forma normale di Cantor possiamo scrivere $\alpha = \omega^k a_k + \dots + \omega^2 a_2 + \omega a_1 + a_0$ e quindi $\alpha = \varphi(P)$ dove $P(X) = a_k X^k + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. L'ordinale $\alpha = 0$ non appartiene all'immagine perchè il polinomio nullo non appartiene a $\mathbb{N}[X]$.

Esercizio 2.

1. Scrivere la forma normale di Cantor degli ordinali $(\omega^3 + 1)^2$ e $(\omega^2 + 1)^\omega$.
2. Sia $\varphi : \omega^2 + \omega^2 \rightarrow \omega^2 + \omega^2$ una funzione strettamente crescente. Dimostrare che se $\beta < \omega^2$ allora $\varphi(\beta) < \omega^2$.
3. Determinare per quali ordinali infiniti α vale la proprietà di sopra se rimpiazziamo ω^2 con α .

Soluzione. (1). $(\omega^3 + 1)^2 = (\omega^3 + 1)(\omega^3 + 1) = (\omega^3 + 1)\omega^3 + (\omega^3 + 1) = \omega^6 + \omega^3 + 1$. Inoltre $(\omega^2 + 1)^\omega = \omega^\omega$; infatti $(\omega^2)^\omega \leq (\omega^2 + 1)^\omega \leq (\omega^3)^\omega$, e $(\omega^2)^\omega = \omega^{2\omega} = \omega^\omega$ e $(\omega^3)^\omega = \omega^{3\omega} = \omega^\omega$.

(2). Supponiamo per assurdo che esista $\beta < \omega^2$ tale che $\varphi(\beta) \geq \omega^2$. Visto che φ è strettamente crescente, si dimostra facilmente per induzione transfinita che per ogni γ tale che $\beta + \gamma < \omega^2 + \omega^2$ si ha $\varphi(\beta + \gamma) \geq \varphi(\beta) + \gamma$. Osserviamo che $\gamma := \omega^2$ è additivamente chiuso e quindi $\beta + \omega^2 = \omega^2 < \omega^2 + \omega^2$; avremmo allora che $\varphi(\omega^2) = \varphi(\beta + \omega^2) \geq \varphi(\beta) + \omega^2 \geq \omega^2 + \omega^2$, il che è assurdo.

(3). Sono tutti e soli gli ordinali $\alpha = \omega^\gamma n$ dove $\gamma \neq 0$ e $0 \neq n < \omega$.

Vediamo prima che gli ordinali α di quella forma soddisfano la proprietà richiesta. Per ogni $\beta < \omega^\gamma n$ esiste $m < n$ con $\omega^\gamma m \leq \beta < \omega^\gamma(m+1)$, e per la differenza a destra esiste $\rho < \omega^\gamma$ tale che $\beta = \omega^\gamma m + \rho$. Analogamente a sopra, osserviamo che per ogni δ tale che $\beta + \delta < \omega^\gamma n + \omega^\gamma n = \omega^\gamma(2n)$ si ha $\varphi(\beta + \delta) \geq \varphi(\beta) + \delta$. Se prendiamo $\delta := \omega^\gamma n$ allora

$$\beta + \delta = (\omega^\gamma m + \rho) + \omega^\gamma n = \omega^\gamma m + (\rho + \omega^\gamma n) = \omega^\gamma m + \omega^\gamma n = \omega^\gamma(m+n) < \omega^\gamma(2n).$$

Se fosse $\varphi(\beta) \geq \omega^\gamma n$, avremmo che $\varphi(\beta + \delta) \geq \varphi(\beta) + \delta \geq \omega^\gamma n + \omega^\gamma n = \omega^\gamma(2n)$, il che è assurdo.

Ad esempio usando la forma normale di Cantor, si osserva che ogni ordinale infinito α si scrive in modo unico nella forma $\alpha = \omega^\gamma n + \vartheta$ per un opportuno $\gamma \neq 0$, un opportuno $0 \neq n \in \omega$, e un opportuno $\vartheta < \omega^\gamma$. Dobbiamo verificare che α non soddisfa la proprietà considerata quando $\vartheta \neq 0$. Notiamo che $\alpha + \alpha = (\omega^\gamma n + \vartheta) + (\omega^\gamma n + \vartheta) = \omega^\gamma n + (\vartheta + \omega^\gamma n) + \vartheta = \omega^\gamma(2n) + \vartheta$. Definiamo la funzione $f : \alpha + \alpha \rightarrow \alpha + \alpha$ come segue:

- $f(\xi) = \xi$ per $\xi < \omega^\gamma n$.
- $f(\omega^\gamma n + \delta) = \alpha + \delta$ per ogni $\delta < \alpha$.

Notiamo che f è ben definita perché $\{\omega^\gamma n + \delta \mid \delta < \alpha\} = \{\xi \mid \omega^\gamma n \leq \xi < \alpha + \alpha\}$, quindi $\text{dom}(f) = \alpha + \alpha$; inoltre anche $\{\alpha + \delta \mid \delta < \alpha\} = \{\xi \mid \alpha \leq \xi < \alpha + \alpha\}$, e quindi $\text{Imm}(f) \subseteq \alpha + \alpha$. Infine osserviamo che f è strettamente crescente e che $\delta := \omega^\gamma n < \alpha$ è tale che $f(\delta) = \alpha$; quindi la funzione f fornisce un controesempio alla proprietà considerata.

Esercizio 3. Stabilire quali assiomi di ZFC sono soddisfatti in ciascuno dei seguenti sei modelli naturali:

$$M_1 = (3, \in); \quad M_2 = (V_3, \in); \quad M_3 = (\omega, \in); \quad M_4 = (V_\omega, \in); \quad M_5 = (\omega + \omega, \in); \quad M_6 = (V_{\omega+\omega}, \in).$$

Soluzione. 1. L'assioma di *estensionalità* vale in tutti e sei i modelli perché gli universi sono insiemi transitivi.

2. L'assioma dell'*insieme vuoto* vale in tutti e sei i modelli perché gli universi contengono l'insieme vuoto.

3. L'assioma della *coppia* non vale in M_1, M_3 ed M_5 perché gli universi sono ordinali, e se prendiamo $\alpha \in M_i$ allora la coppia $\{\alpha, \alpha\} = \{\alpha\} \notin M_i$ perché non è un ordinale. Abbiamo visto a lezione che (V_α, \in) soddisfa l'assioma della *coppia* se e solo se α è limite; quindi M_2 non lo soddisfa, mentre M_4 e M_6 lo soddisfano.

4. L'assioma dell'*unione* vale in tutti e sei i modelli. Infatti ricordiamo che $\bigcup \lambda = \lambda$ se λ è un ordinale limite, e $\bigcup(\beta+1) = \beta$ se $\beta+1$ è un ordinale successore. Quindi se α è un ordinale, il modello (α, \in) soddisfa l'assioma dell'*unione*; in particolare M_1, M_3, M_5 lo soddisfano. Inoltre, abbiamo visto a lezione che tutti i livelli V_α soddisfano l'assioma dell'*unione*; in particolare M_2, M_4, M_6 lo soddisfano.

5. M_1 soddisfa l'assioma di *separazione*; infatti tutti i sottoinsiemi di $0, 1, 2$ (gli elementi di M_1) appartengono a 3 . M_3 e M_5 invece non soddisfano l'assioma di *separazione* perché, ad esempio, $3 \in M_i$ ma il sottoinsieme $\{1, 2\} \notin M_i$. Inoltre, abbiamo visto a lezione che tutti i livelli V_α soddisfano l'assioma di *separazione*; in particolare M_2, M_4, M_6 lo soddisfano.

6. L'assioma delle *parti* non vale in M_1 ma vale in M_3 ed M_5 . Osserviamo infatti che se α è un ordinale, la collezione dei suoi sottoinsiemi che sono ordinali coincide con $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$. Questo implica che se M è un modello naturale il cui universo è un ordinale α , allora M soddisfa l'assioma delle parti se e solo se α è limite. Inoltre, abbiamo visto a lezione che il livello V_α soddisfa l'assioma delle parti se e solo se α è limite; in particolare M_2 non lo soddisfa, mentre M_4 e M_6 lo soddisfano.

7. L'assioma di *scelta* vale in tutti e sei i modelli. Infatti M_1, M_3, M_5 soddisfano banalmente l'assioma di *scelta* perché in quegli universi non esistono famiglie di insiemi non vuoti (ogni ordinale $\alpha \neq 0$ contiene l'insieme vuoto). Inoltre, abbiamo visto a lezione che tutti i livelli V_α soddisfano l'assioma di *scelta*.

8. L'assioma dell'*infinito* non vale in M_1, M_2, M_3, M_4 perché sono universi cui appartengono soltanto insiemi finiti. Invece M_5 ed M_6 soddisfano l'assioma dell'infinito perché contengono ω .

9. L'assioma di *rimpiazzamento* non vale nei modelli M_1, M_3 e M_5 . Osserviamo infatti che se $\alpha > 1$ è un ordinale, e consideriamo la funzione $F : 1 \rightarrow \alpha$ dove $F(0) = 1$, allora $\text{Imm}(F) = \{1\}$ non è un ordinale e quindi non appartiene ad α . Questo implica che se M è un modello naturale il cui universo è un ordinale $\alpha > 1$, allora M non soddisfa l'assioma di *rimpiazzamento*. Abbiamo visto a lezione che i livelli V_α dove α è successore non soddisfano l'assioma di *rimpiazzamento*; in particolare M_2 non lo soddisfa. Inoltre abbiamo visto a lezione che in $M_4 = (V_\omega, \in)$ vale l'assioma di *rimpiazzamento* mentre in $M_6 = (V_{\omega+\omega}, \in)$ non vale.

10. L'assioma di fondazione vale banalmente in tutti e sei i modelli, perché non ci sono catene \in -discendenti.

Esercizio 4. Per ogni insieme X denotiamo con $[X]_{<} := \{A \subseteq X \mid |A| < |X|\}$. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se X è un insieme ordinato infinito, allora $|\{f : X \rightarrow X \mid f \text{ limitata}\}| = |\mathcal{P}(X)|$.
2. Se X è infinito allora $|[X]_{<}| = \sup\{|X|^\mu \mid \mu < |X| \text{ cardinale}\}$.
3. Se X ha una cardinalità fortemente inaccessibile, allora $|[X]_{<}| = |X|$.
4. Se X è infinito allora $|\mathbb{H}(X)_{<}| = |\mathcal{P}(X)|$, dove $\mathbb{H}(X) := \{\alpha \in \mathbf{ORD} \mid |\alpha| \leq |X|\}$ è il numero di Hartogs di X .

Soluzione. (1). Prendiamo due elementi $x \neq y$ in X tali che esista $z \in X$ con $x, y < z$. Allora

$$|\{f : X \rightarrow X \mid f \text{ limitata}\}| \leq |\{f : X \rightarrow \{x, y\}\}| = 2^{|X|} = |\mathcal{P}(X)|.$$

Per l'altra disuguaglianza basta notare che se $\kappa := |X|$ allora

$$|\{f : X \rightarrow X \mid f \text{ limitata}\}| \geq |\text{Fun}(X, X)| = |\text{Fun}(\kappa, \kappa)| = \kappa^\kappa = 2^\kappa = |\mathcal{P}(X)|.$$

(2). Sia $\kappa := |X|$. Osserviamo che se $I := \{\mu \text{ cardinale} \mid \mu < \kappa\}$, allora $[\kappa]_{<} = \bigcup_{\mu \in I} [\kappa]^\mu$ è un'unione disgiunta, dove $[\kappa]^\mu := \{A \subseteq \kappa \mid |A| = \mu\}$. Banalmente $|I| \leq \kappa$; inoltre abbiamo visto a lezione che $|\kappa|^\mu = \kappa^\mu$. Abbiamo allora:

$$|[X]_{<}| = |[\kappa]_{<}| = \left| \bigcup_{\mu \in I} [\kappa]^\mu \right| = \sum_{\mu \in I} \kappa^\mu = \max \left\{ \sup_{\mu \in I} \kappa^\mu, |I| \right\} = \sup_{\mu \in I} \kappa^\mu = \sup\{|X|^\mu \mid \mu < |X| \text{ cardinale}\}.$$

(3). Sia $\kappa = |X|$. Visto che banalmente $\{\{\alpha\} \mid \alpha \in \kappa\} \subset [X]_{<}$, segue subito che $\kappa \leq |[X]_{<}|$. Per l'altra disuguaglianza osserviamo che, per il punto (2), si ha $|[X]_{<}| = \sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \kappa \text{ cardinale}\}$. Per concludere, basta vedere che $\kappa^\mu = \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$. Visto che κ è regolare, ogni funzione $f : \mu \rightarrow \kappa$ è limitata e dunque esiste un ordinale $\gamma < \kappa$ tale che $\text{Imm}(f) \subseteq \gamma$. Allora:

$$\kappa^\mu = |\text{Fun}(\mu, \kappa)| = \left| \bigcup_{\gamma < \kappa} \text{Fun}(\mu, \gamma) \right| \leq \sum_{\gamma < \kappa} |\gamma|^\mu = \max \left\{ \sup_{\gamma < \kappa} |\gamma|^\mu, \kappa \right\}.$$

Visto che κ è un limite forte, $|\gamma|, \mu < \kappa \Rightarrow |\gamma|^\mu < \kappa$ e quindi $\max \left\{ \sup_{\gamma < \kappa} |\gamma|^\mu, \kappa \right\} = \kappa$.

(4). Sia $\kappa = |X|$. Allora $|\mathcal{P}(X)| = 2^\kappa$; inoltre $\mathbb{H}(X) = \kappa^+$ è il successore di κ , e quindi

$$|\mathbb{H}(X)_{<}| = |[\kappa^+]_{<}| = \{A \subseteq \kappa^+ \mid |A| \leq \kappa\}.$$

Banalmente $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq [\mathbb{H}(X)]_{<} e quindi $2^\kappa \leq |[\mathbb{H}(X)]_{<}|$. Per l'altra disuguaglianza, osserviamo che $[\mathbb{H}(X)]_{<} = \bigcup_{\mu \leq \kappa} [\kappa^+]^\mu$ dove $[\kappa^+]^\mu = \{A \subseteq \kappa^+ \mid |A| = \mu\}$. Abbiamo visto a lezione che $|[\kappa^+]^\mu| = (\kappa^+)^\mu = (\text{per Hausdorff}) = \kappa^\mu \cdot \kappa^+$. Allora$

$$|[\mathbb{H}(X)]_{<}| \leq \sum_{\mu \leq \kappa} \kappa^\mu \cdot \kappa^+ \leq \max \left\{ \sup_{\mu \leq \kappa} (\kappa^\mu \cdot \kappa^+), \kappa \right\} = \kappa^\kappa \cdot \kappa^+ = 2^\kappa \cdot \kappa^+ = 2^\kappa.$$

Esercizio 5. Dimostrare che per tutti gli ordinali α, β, γ dove $|\gamma| \leq \aleph_\beta$, vale la seguente uguaglianza:

$$(\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|}.$$

Soluzione. Osserviamo intanto che se $\gamma = n \in \omega$ è finito, allora la tesi segue dal teorema di Hausdorff; infatti

$$(\aleph_{\alpha+n})^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+n})^n.$$

Procediamo per induzione transfinita su γ . Sia $\gamma = \delta + 1$ un successore. Visto che possiamo assumere γ infinito, abbiamo che $|\gamma| = |\delta|$, e usando due volte il Teorema di Hausdorff, si ottiene:

$$\begin{aligned} (\aleph_{\alpha+\delta+1})^{\aleph_\beta} &= (\aleph_{\alpha+\delta})^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} = (\text{ip. ind.}) = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta})^{|\delta|} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} = \\ &= (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta+1})^{|\delta|} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta+1})^{|\delta+1|}. \end{aligned}$$

Consideriamo infine il caso in cui γ è limite. Abbiamo:

$$\begin{aligned} (\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta} &= \left((\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|} \right)^{\aleph_\beta} = \left(\prod_{\delta < \gamma} \aleph_{\alpha+\delta} \right)^{\aleph_\beta} = \prod_{\delta < \gamma} (\aleph_{\alpha+\delta})^{\aleph_\beta} = (\text{ip. ind.}) = \prod_{\delta < \gamma} \left((\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta})^{|\delta|} \right) \leq \\ &\leq \prod_{\delta < \gamma} \left((\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|} \right) = \left((\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|} \right)^{|\gamma|} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|} \leq (\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta}. \end{aligned}$$