Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 6 Febbraio 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Sull'insieme $\mathbb{N}[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{N}$ si consideri la seguente relazione:

$$P(X) \prec Q(X) \iff \lim_{n\to\infty} (Q(n) - P(n)) > 0.$$

1. Dimostrare che $\prec$ è un buon ordine.
2. Trovare l'ordinale α tale che $(\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\alpha, \in)$.

Esercizio 2.

1. Scrivere la forma normale di Cantor degli ordinali $(\omega^3 + 1)^2$ e $(\omega^2 + 1)^\omega$.
2. Sia $\varphi : \omega^2 + \omega^2 \to \omega^2 + \omega^2$ una funzione strettamente crescente. Dimostrare che se $\beta < \omega^2$ allora $\varphi(\beta) < \omega^2$.
3. Determinare per quali ordinali infiniti α vale la proprietà di sopra se rimpiazziamo ω^2 con α.

Esercizio 3. Stabilire quali assiomi di ZFC sono soddisfatti in ciascuno dei seguenti sei modelli naturali:

$$M_1 = (3, \in); \quad M_2 = (V_3, \in); \quad M_3 = (\omega, \in); \quad M_4 = (V_\omega, \in); \quad M_5 = (\omega + \omega, \in); \quad M_6 = (V_{\omega+\omega}, \in).$$

Esercizio 4. Per ogni insieme X denotiamo con $[X]_< := \{A \subseteq X \mid |A| < |X|\}$. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se X è un insieme ordinato infinito, allora $|\{f : X \to X \mid f \text{ limitata}\}| = |\mathcal{P}(X)|$.
2. Se X è infinito allora $|[X]_<| = \sup\{|X|^\mu \mid \mu < |X| \text{ cardinale}\}$.
3. Se X ha una cardinalità fortemente inaccessibile, allora $|[X]_<| = |X|$.
4. Se X è infinito allora $|[\mathbb{H}(X)]_<| = |\mathcal{P}(X)|$, dove $\mathbb{H}(X) := \{\alpha \in \mathbf{ORD} \mid |\alpha| \leq |X|\}$ è il numero di Hartogs di X.

Esercizio 5. Dimostrare che per tutti gli ordinali α, β, γ dove $|\gamma| \leq \aleph_\beta$, vale la seguente uguaglianza:

$$(\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|}.$$