Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 9 Settembre 2024

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1 (11 punti)**.** Per ogni cardinale κ, sia $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu < \kappa \text{ cardinale}\}$.

1. Trovare il valore di $\kappa^{<\kappa}$ quando $\kappa = \aleph_0$ e quando $\kappa = \aleph_1$.
2. Dimostrare che se κ è un cardinale singolare allora $\kappa^{<\kappa} > \kappa$.
3. Dimostrare che se per ogni cardinale infinito κ *regolare* si ha $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, allora vale l'*ipotesi generalizzata del continuo* GCH.
4. Dimostrare che vale anche l'implicazione inversa nella (4), cioè che se vale l'*ipotesi generalizzata del continuo* GCH allora per ogni cardinale infinito κ *regolare*, si ha $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Esercizio 2 (9 punti)**.** Dimostrare le seguenti proprietà relative all'esponenziazione tra ordinali.

1. $n^\omega = k^\omega$ per tutti gli ordinali finiti $n, k < \omega$ maggiori di 1.
2. $2^{(\omega^2)} = \omega \cdot 2^{(\omega^2)}$.
3. Se $\omega < \beta \leq \omega^2$ allora $2^\beta > \beta$.

Esercizio 3 (12 punti)**.** Consideriamo la gerarchia di von Neumann, definita per ricorsione transfinita ponendo

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che se $X \in V_\alpha$ allora $\bigcup X = \{y \mid \exists x \in X \ y \in x\} \in V_\alpha$.
2. Dimostrare che se $R \in V_\alpha$ è una relazione binaria, allora $\mathrm{dom}(R), \mathrm{Imm}(R) \in V_\alpha$.
3. Dimostrare che non esistono ordinali $\alpha > 0$ tali che $V_\alpha \subseteq V_\alpha \times V_\alpha$.
4. Esistono ordinali $\alpha > 0$ tali che $V_\alpha \times V_\alpha \subseteq V_\alpha$?

   [Se la risposta è negativa darne una dimostrazione; se è positiva fornire esempi.]
5. Determinare tutti gli ordinali α per i quali vale la seguente proprietà:
   - $\mathrm{Fun}(\omega, \alpha) \subseteq V_\alpha$.
6. Determinare tutte le coppie di ordinali (α, β) che soddisfano la seguente proprietà:
   - Ogni funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subseteq V_\alpha$ e $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \beta$ appartiene a V_β.