Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 10 Aprile 2019

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Dimostra le seguenti proprietà:

1. Se X è completamente separabile (cioè se esiste una base di aperti numerabile) allora $|X| \leq \mathfrak{c}$.
2. Se X è separabile (cioè esiste un sottoinsieme denso numerabile) allora $|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Più in generale, se X ha un sottoinsieme denso di cardinalità κ allora $|X| \leq 2^{2^\kappa}$.
3. Se X è separabile e ogni suo punto ha una base di aperti numerabile, allora $|X| \leq \mathfrak{c}$. Più in generale, se X ha un sottoinsieme denso di cardinalità κ e X ha carattere μ (cioè ogni suo punto ha una base di intorni di cardinalità μ) allora $|X| \leq \kappa^\mu$.

Soluzione. (1). Sia $\mathcal{B}$ una base di aperti numerabile. Per ogni $x \in X$ consideriamo la famiglia $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$. Visto che X è di Hausdorff, la funzione $\psi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ dove $x \mapsto \mathcal{B}_x$ è iniettiva. Concludiamo che $|X| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^{\aleph_0}$.

(2). Sia D un sottoinsieme denso di X. Per ogni $x \in X$ definiamo

$$\psi(x) = \left\{A \subseteq D \mid x \in \overline{A}\right\}.$$

Visto che X è Hausdorff, la funzione $\psi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ è iniettiva, e possiamo concludere che $|X| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))| = 2^{2^{|D|}} = 2^{2^\kappa}$. Per mostrarlo, assegnati $x \neq y$, prendiamo due aperti disgiunti $U \cap V = \emptyset$ con $x \in U$ e $y \in V$. Se $A = D \setminus V$ allora $x \in \overline{A}$ ma $y \notin \overline{A}$, e quindi $\psi(x) \neq \psi(y)$. Infatti, per ogni U' intorno aperto di x, per la densità di D si ha che $\emptyset \neq (U \cap U') \cap D = (U \cap U') \cap A \subseteq U' \cap A$. Inoltre, $V \cap A = \emptyset$ e quindi $y \notin \overline{A}$.

Equivalentemente a sopra, per ogni $x \in X$ possiamo definire

$$\varphi(x) = \{U \cap D \mid U \text{ intorno di } x\}.$$

La funzione $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ è iniettiva e quindi $|X| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))| = 2^{2^{|D|}} = 2^{2^\kappa}$. Infatti, visto che X è di Hausdorff, se $x \neq y$ possiamo prendere un intorno U di x e un intorno V di y con $U \cap V = \emptyset$. Allora $U \cap D \in \varphi(x)$ ma $U \cap D \notin \varphi(y)$, visto che $U \cap D \neq V' \cap D$ ogni intorno V' di y. Notiamo infatti che $V \cap (V' \cap D) = (V \cap V') \cap D \neq \emptyset$ per densità, mentre $V \cap (U \cap D) = (V \cap U) \cap D = \emptyset$.

(3). Sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Per ogni $x \in X$, sia $\mathcal{B}_x = \{U_i^x \mid i \in \mu\}$ una base di intorni di x. Un'idea possibile è considerare la funzione $\psi : X \to \mathrm{Fun}(\mu, D)$ dove ad ogni $x \in X$ si associa una funzione $f_x : \kappa \to D$ tale che $f_x(i) \in U_i^x \cap D$. Tuttavia non possiamo dimostrare che una tale funzione ψ è iniettiva. Infatti se $x \neq y$, possiamo prendere intorni $U_i^x \cap U_j^y = \emptyset$, ma questo garantisce soltanto che $f_x(i) \neq f_j(y)$, ma non esclude la possibilità che $f_x = f_y$.

Un modo per superare questa difficoltà è considerare una funzione φ definita sulle parte finite di μ. Precisamente, per ogni $x \in X$, prendiamo una successione $\sigma_x : \mathrm{Fin}(\mu) \to D$ dove $\sigma_x(a) \in \left(\bigcap_{i \in a} U_i^x\right) \cap D$ per ogni $a \in \mathrm{Fin}(\mu)$ (non ha importanza come è definita $\sigma_x(\emptyset)$). Visto che lo spazio X è di Hausdorff, la funzione $\varphi : X \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}(\mu), D)$ dove $x \mapsto \sigma_x$ è una funzione iniettiva, e quindi $|X| \leq |\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}(\mu), D)| = |D|^{\mathrm{Fin}(\mu)} = \kappa^\mu$. Infatti, se $x \neq y$ prendiamo due intorni disgiunti $U_i^x \cap U_j^y = \emptyset$; notiamo che anche $(U_i^x \cap U_j^x) \cap (U_i^y \cap U_j^y) = \emptyset$, e allora $\sigma_x(\{i, j\}) \neq \sigma_y(\{i, j\})$.

Esercizio 2.

1. Supponendo che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, determinare la cardinalità dei seguenti 6 insiemi al variare delle coppie di naturali (i, j) con $0 \le i \le j \le 2$:

$$\mathcal{F}_{ij} = \{f : \omega_i \to \omega_j \mid |\mathrm{Im}(f)| \le \aleph_0\}$$

2. Supponiamo che $\aleph_\omega$ sia un limite forte. Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\mathcal{F} = \{f : \aleph_\omega \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha \in \aleph_\omega \ \forall \gamma, \gamma' \ge \alpha \ f(\gamma) = f(\gamma')\}.$$

Soluzione. (1). Senza alcuna ipotesi sul valore del continuo, mostriamo che $|\mathcal{F}_{ij}| = \aleph_j \cdot 2^{\aleph_i}$ per ogni $i, j \in \omega$. Assumendo che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, potremo allora concludere che $|\mathcal{F}_{ij}| = 2^{\aleph_i}$ per ogni $0 \le i \le j \le 2$, visto che in questo caso $2^{\aleph_i} \ge 2^{\aleph_0} = \aleph_2 \ge \aleph_j$. Scriviamo $\mathcal{F}_{ij}$ come l'unione

$$\mathcal{F}_{ij} = \bigcup_{A \in [\omega_j]^{\le \aleph_0}} \mathrm{Fun}(\omega_i, A),$$

dove abbiamo denotato $[\omega_j]^{\le \aleph_0} = \{A \subseteq \omega_j \mid |A| \le \aleph_0\}$. Abbiamo visto a lezione che $|[\kappa]^{\le \nu}| = \kappa^\nu$ per ogni coppia di cardinali infiniti $\kappa \ge \nu$, e quindi abbiamo che:

$$|\mathcal{F}_{ij}| \le \sum_{A \in [\omega_j]^{\le \aleph_0}} |\mathrm{Fun}(\omega_i, A)| = |[\omega_j]^{\le \aleph_0}| \cdot \sup\{|\mathrm{Fun}(\omega_i, A)| \mid A \in [\omega_j]^{\le \aleph_0}\} = \aleph_j^{\aleph_0} \cdot \aleph_0^{\aleph_i} = \aleph_j \cdot 2^{\aleph_i}.$$

Infatti, dalla formula di Hausdorff segue che $\aleph_j^{\aleph_0} = \aleph_j \cdot 2^{\aleph_0}$; inoltre $\aleph_0^{\aleph_i} = 2^{\aleph_i}$, e quindi $\aleph_j^{\aleph_0} \cdot \aleph_0^{\aleph_i} = \aleph_j \cdot 2^{\aleph_0}$. Viceversa, $\mathrm{Fun}(\omega_i, \{0, 1\}) \subseteq \mathcal{F}_{ij}$, dunque $2^{\aleph_i} \le |\mathcal{F}_{ij}|$; e inoltre le funzioni costanti in $\mathcal{F}_{ij}$ sono $\aleph_j$, dunque anche $\aleph_j \le |\mathcal{F}_{ij}|$. Abbiamo così anche l'altra disuguaglianza $\aleph_j \cdot 2^{\aleph_i} \le |\mathcal{F}_{ij}|$.

(2). Notiamo che $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < \aleph_\omega} \mathcal{F}_\alpha$ dove $\mathcal{F}_\alpha$ è l'insieme delle funzioni $f : \aleph_\omega \to \mathbb{R}$ che sono costanti sull'intervallo $I_\alpha = [\alpha, \aleph_\omega)$. La funzione $\psi_\alpha : \mathcal{F}_\alpha \to \mathrm{Fun}([0, \alpha), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ dove $f \mapsto (f|_{[0,\alpha)}, f(\alpha))$ è iniettiva, quindi $|\mathcal{F}_\alpha| \le |\alpha|^{|\mathbb{R}|} \cdot |\mathbb{R}|$. Visto che $\aleph_\omega$ è limite forte, $2^{\aleph_0} = \aleph_m$ e quindi, di nuovo usando l'ipotesi di $\aleph_\omega$ limite forte, $|\mathcal{F}_\alpha| \le |\alpha|^{\aleph_m} \cdot \aleph_m < \aleph_\omega$. Otteniamo la disuguaglianza:

$$|\mathcal{F}| \le \sum_{\alpha < \aleph_\omega} |\mathcal{F}_\alpha| = \aleph_\omega \cdot \sup\{|\mathcal{F}_\alpha| \mid \alpha < \aleph_\omega\} = \aleph_\omega.$$

L'altra disuguaglianza $\aleph_\omega \le |\mathcal{F}|$ è immediata. Ad esempio, la funzione $\varphi : \aleph_\omega \to \mathcal{F}$ dove $\varphi(\alpha) : \aleph_\omega \to \mathbb{R}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $I_\alpha = [\alpha, \aleph_\omega)$ è una funzione iniettiva.

Esercizio 3.

1. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 1)^{\omega \cdot 3 + 1}$.

2. Dimostrare che per ogni coppia di cardinali infiniti κ, ν dove κ è debolmente inaccessibile (cioè limite e regolare) si ha che $\kappa^\nu = \sup_{\mu < \kappa} \mu^\nu$.

3. Mostrare esempi di cardinali infiniti κ, ν tali che $\sup_{\mu < \kappa} \mu^\nu < \kappa$.

4. Dimostrare che vale l'uguaglianza $\sup_{n < \omega} (\aleph_n)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$ se e solo se il continuo $\mathfrak{c} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

Soluzione. (1). Valgono le disuguaglianze:

$$(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 1)^{\omega \cdot 3} \ge (\omega^2)^{\omega \cdot 3} = \omega^{2(\omega \cdot 3)} = \omega^{(2 \cdot \omega)3} = \omega^{\omega 3}$$

$$(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 1)^{\omega \cdot 3} \le (\omega^3)^{\omega \cdot 3} = \omega^{3(\omega 3)} = \omega^{(3\omega)3} = \omega^{\omega 3}.$$

Quindi:

$$(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1)^{\omega\cdot 3+1} = (\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1)^{\omega\cdot 3}(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1) = \omega^{\omega 3}(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1) = \omega^{\omega 3+2}3+\omega^{\omega 3+1}2+\omega^{\omega 3}.$$

(2). La disuguaglianza $\sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu \leq \kappa^\nu$ è sempre vera. Se $\kappa \leq \nu$ allora $\sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu \geq 2^\nu = \kappa^\nu$. Se invece $\nu < \kappa$, dall'ipotesi di κ regolare segue che ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è limitata, e quindi si ha

$$\kappa^\nu = |\mathrm{Fun}(\nu,\kappa)| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathrm{Fun}(\nu,\alpha)\right| \leq \sum_{\alpha<\kappa}|\alpha|^\nu = \max\left\{\kappa, \sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu\right\} = \sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu.$$

Notiamo che l'ultima uguaglianza vale perché κ limite implica $\sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu \geq \sup_{\mu<\kappa}\mu = \kappa$.

(3). Se $\kappa = \mathfrak{c}^+$ e $\nu = \aleph_0$, allora $\sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c} < \kappa$.

(4). Grazie alla formula di Hausdorff, per ogni $n < \omega$ si ha che $(\aleph_n)^{\aleph_0} = (\aleph_0)^{\aleph_0}\cdot\aleph_n = \mathfrak{c}\cdot\aleph_n$, e quindi $\sup_{n<\omega}(\aleph_n)^{\aleph_0} = \mathfrak{c}\cdot\aleph_\omega = \max\{\mathfrak{c},\aleph_\omega\}$. D'altra parte $(\aleph_\omega)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\mathrm{cof}(\aleph_\omega)} > \aleph_\omega$, e quindi possiamo concludere che $\sup_{n<\omega}(\aleph_n)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$ se e solo se $\mathfrak{c} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

Esercizio 4.

1. Sia α un ordinale qualunque, e sia κ un cardinale infinito. Dimostrare che le seguenti due proprietà sono equivalenti:

   (a) α è moltiplicativamente chiuso (cioè $\beta,\gamma < \alpha \Rightarrow \beta\cdot\gamma < \alpha$) e $\mathrm{cof}(\alpha) = \kappa$.

   (b) κ è il più piccolo cardinale per cui esiste una successione $\langle\alpha_i \mid i \in \kappa\rangle$ di elementi di α che è crescente, illimitata, e tale che $(\alpha_i)^2 < \alpha_{i+1}$ per ogni $i < \kappa$.

2. Supponiamo che con la divisione euclidea tra l'ordinale α e ω_1 si ottenga come quoziente un ordinale successore. Dimostrare che allora ogni funzione $g : \alpha \to \alpha$ strettamente crescente e continua ai limiti ammette almeno $\aleph_1$ punti fissi.

Soluzione. *(a)* $\Rightarrow$ *(b)*. Visto che $\mathrm{cof}(\alpha) = \kappa$, esiste una sequenza $\langle\gamma_j \mid j \in \kappa\rangle$ illimitata in α. Per ricorsione transfinita, definiamo $\alpha_0 = \gamma_0$; $\alpha_\lambda = \bigcup_{i<\lambda}\alpha_i$ se λ è limite; e $\alpha_{i+1} = \gamma_j$ dove $j \in \kappa$ è il minimo indice tale che $\gamma_j > (\alpha_i)^2$. Notiamo che la definizione data è ben posta. Infatti, per l'ipotesi di chiusura moltiplicativa, da $\alpha_i < \alpha$ segue che $(\alpha_i)^2 = \alpha_i\cdot\alpha_i < \alpha$, e quindi esistono indici j con $\gamma_j > \alpha_i^2$. È immediato verificare che la sequenza $\langle\alpha_i \mid i \in \kappa\rangle$ così definita è crescente, illimitata in α e tale che $(\alpha_i)^2 < \alpha_{i+1}$ per ogni $i < \kappa$. Infine ricordiamo che $\kappa = \mathrm{cof}(\alpha)$ è il più piccolo cardinale tale che esistono κ-sequenze illimitate in α.

(b) $\Rightarrow$ *(a)*. Sia $\langle\alpha_i \mid i \in \kappa\rangle$ una sequenza come data dall'ipotesi. Dati $\beta_1, \beta_2 < \alpha$, prendiamo $i_1, i_2 < \kappa$ tali che $\beta_1 < \alpha_{i_1}$ e $\beta_2 < \alpha_{i_2}$. Se $j = \max\{i_1, i_2\}$, allora $\beta_1\cdot\beta_2 < \alpha_j\cdot\alpha_j < \alpha_{j+1} < \alpha$. Questo conclude la dimostrazione che α è moltiplicativamente chiuso. Visto che $\langle\alpha_i \mid i \in \kappa\rangle$ è illimitata, $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \kappa$. Notiamo infine che $\mathrm{cof}(\alpha) = \mu < \kappa$ non è possibile, altrimenti, per l'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) già dimostrata, si otterrebbe l'esistenza di una successione $\langle\alpha_j \mid j \in \mu\rangle$ di elementi di α che è crescente, illimitata, e tale che $(\alpha_j)^2 < \alpha_{j+1}$, e questo contraddirebbe la minimalità di κ.

(2). Per ipotesi, $\alpha = \omega_1(\gamma+1)+\rho = \omega_1\gamma+\omega_1+\rho$ per un opportuno γ e un opportuno $\rho < \omega_1$. Notiamo che per ogni $\beta < \omega_1$ deve essere $g(\omega_1\gamma+\beta) < \omega_1\gamma+\omega_1$. Infatti, se per assurdo fosse $g(\omega_1\gamma+\beta) \geq \omega_1\gamma+\omega_1$ per qualche $\beta < \omega_1$, si avrebbe che $g(\omega_1\gamma+\omega_1) = g((\omega_1\gamma+\beta)+\omega_1) \geq \omega_1\gamma+\omega_1+\omega_1$, contro l'ipotesi di $\rho < \omega_1$. D'altra parte, visto che g è crescente, si ha $g(\alpha) \geq \alpha$ per ogni α, e in particolare $g(\omega_1\gamma+\beta) \geq \omega_1\gamma+\beta$. Quindi per ogni $\beta < \omega_1$ esiste (ed unico) ordinale $f(\beta) < \omega_1$ tale che $g(\omega_1\gamma+\beta) = \omega_1\gamma+f(\beta)$. Visto che g è crescente e continua ai limiti, anche la funzione $f : \omega_1 \to \omega_1$ lo è. Per un risultato visto a lezione, f ammette $\aleph_1$ punti fissi, e quindi anche g ammette $\aleph_1$ punti fissi.