Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 7 Febbraio 2019

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Supponiamo che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $X_i = \{A \subset \mathbb{R} \mid |A| = \aleph_i\}$ per $i = 0, 1, 2$.
2. $Y = \{A \subset \mathbb{R} \mid (A, <) \text{ ha tipo d'ordine } \omega^2\}$.
3. Il quoziente $Z/\equiv$ dell'insieme $Z = \{A \subset \mathbb{R} \mid (A, <) \text{ è bene ordinato}\}$ modulo la relazione di equivalenza $A \equiv B \Leftrightarrow (A, <) \cong (B, <)$.
4. $W = \{R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid R \text{ è una relazione di buon ordine su } \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega \cdot n + k)^{\omega \cdot 3 + 1}$, dove n e k sono naturali non nulli.
2. Determinare gli ordinali β tali che $\omega^\omega \cdot \beta = \beta + \omega^\omega$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.
2. Siano $\nu \leq \kappa$ cardinali infiniti. Assumendo l'*ipotesi generalizzata del continuo*, dimostrare che se $\nu < \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \kappa$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Sia γ un ordinale qualunque e sia $n \in \omega$ un naturale con $n > 1$. Dimostrare che per ogni funzione $f : \omega^\gamma \cdot n \to \omega^\gamma \cdot n$ crescente e continua ai limiti si ha che $f(\omega^\gamma) = \omega^\gamma$.
2. Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Fun}(\omega_1, \omega_1)$ un insieme di funzioni $g : \omega_1 \to \omega_1$. Dimostrare che se $|\mathcal{G}| < \aleph_1$ allora esiste un ordinale infinito $\gamma < \omega_1$ con la proprietà che $g(\beta) < \gamma$ per ogni $\beta < \gamma$ e per ogni $g \in \mathcal{G}$.

[1] Con $(A, <)$ si intende l'insieme ordinato avente come ordinamento quello indotto da $\mathbb{R}$.