Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 21 Gennaio 2019

Cognome e nome:..

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Ricordiamo che una *partizione* di un insieme X è una famiglia non vuota $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di insiemi non vuoti a due a due disgiunti tali che $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = X$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $Y_1 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione finita di $\mathbb{R}\}$;
2. $Y_2 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione numerabile di $\mathbb{R}\}$;
3. $Y_4 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{R}\}$;
4. $Y_4 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{R}$ tale che $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$ e dove $|A| = \mathfrak{c}$ per ogni $A \in \mathcal{F}\}$.

Soluzione. Vedremo che $|Y_1| = |Y_2| = |Y_3| = |Y_4| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Visto che ogni partizione $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, si ha che $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, e quindi $|Y_1|, |Y_2|, |Y_3|, |Y_4| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$. Vediamo ora le disuguaglianze inverse.

(1). Denotiamo con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei reali positivi. Ad ogni sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}^+$ associamo la partizione finita $\mathcal{F}_A := \{A, \mathbb{R} \setminus A\}$. La corrispondenza $A \mapsto \mathcal{F}_A$ è iniettiva e allora, visto che i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^+$ sono $2^{\mathfrak{c}}$, si ha $2^{\mathfrak{c}} \leq |Y_1|$.

(2). Ad ogni sottoinsieme non vuoto $A \subseteq [0, 1)$ associamo la partizione numerabile

$$\mathcal{F}_A := \{n + A \mid n \in \omega\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \omega} (n + A)\},$$

dove abbiamo denotato $n + A := \{n + x \mid x \in A\} \subseteq [n, n + 1)$. La corrispondenza $A \mapsto \mathcal{F}_A$ è iniettiva e allora, visto che i sottoinsiemi non vuoti di $[0, 1)$ sono $2^{\mathfrak{c}}$, si ha che $2^{\mathfrak{c}} \leq |Y_2|$.

(3). Notiamo che $Y_1 \subseteq Y_3$, e quindi $2^{\mathfrak{c}} = |Y_1| \leq |Y_3|$.

(4). Fissiamo una bigezione $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per ogni $r \in \mathbb{R}$, sia $A_r := \{\psi(r, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$. Ad ogni sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}^+$ con $|B| = \mathfrak{c}$, associamo la partizione $\mathcal{F}_B := \{A_r \mid r \in B\} \cup \{\bigcup_{r \notin B} A_r\}$. Notiamo che $\mathcal{F}_B \in Y_4$. Infatti, $\mathcal{F}_B$ è una partizione di $\mathbb{R}$ tale che $|\mathcal{F}_B| = \mathfrak{c}$ e ogni $A \in \mathcal{F}_B$ ha cardinalità $|A| = \mathfrak{c}$. La corrispondenza $B \mapsto \mathcal{F}_B$ è iniettiva e allora, visto che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^+$ aventi la cardinalità del continuo sono $2^{\mathfrak{c}}$, si ha che $2^{\mathfrak{c}} \leq |Y_4|$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Siano $n, m, k \in \omega$ naturali non nulli. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 n + \omega m + k)^{\omega+2}$.
2. Trovare tutti e soli gli ordinali α tali che $(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = \alpha$.

Soluzione. (1). Scriviamo $(\omega^2 n + \omega m + k)^{\omega+2} = (\omega^2 n + \omega m + k)^{\omega} \cdot (\omega^2 n + \omega m + k)^2$. Notiamo che per ogni ordinale α si ha

- $\omega \leq \alpha < \omega^\omega \Rightarrow \alpha^\omega = \omega^\omega$.

Infatti, $\alpha < \omega^\omega \Rightarrow \alpha < \omega^h$ per qualche $h \in \omega$, e quindi $\omega^\omega \leq \alpha^\omega \leq (\omega^h)^\omega = \omega^{h \cdot \omega} = \omega^\omega$. In particolare, abbiamo che $(\omega^2 n + \omega m + k)^\omega = \omega^\omega$.

Adesso occupiamoci di $(\omega^2 n + \omega m + k)^2$. Per cominciare, mostriamo che

- $(\omega^2 n + \omega m + k) \cdot t = \omega^2 nt + \omega m + k$ per ogni $t \in \omega$ non nullo.

Procedendo per induzione, la base $t = 1$ è ovvia, e il passo induttivo è dato dalle seguenti uguaglianze:

$$(\omega^2 n + \omega m + k) \cdot (t+1) = (\omega^2 n + \omega m + k)t + (\omega^2 n + \omega m + k) = (\omega^2 nt + \omega m + k) + (\omega^2 n + \omega m + k) =$$

$$\omega^2 nt + (\omega m + k + \omega^2 n) + \omega m + k = \omega^2 nt + \omega^2 n + \omega m + k = \omega^2 n(t+1) + \omega m + k.$$

Adesso notiamo che per ogni ordinale α e per ogni $s \in \omega$, vale l'implicazione

- $\omega^s \leq \alpha < \omega^{s+1} \Rightarrow \alpha \cdot \omega = \omega^{s+1}$.

Infatti, $\alpha < \omega^{s+1} = \omega^s \cdot \omega \Rightarrow \alpha < \omega^s \cdot h$ per qualche $h \in \omega$, e quindi si hanno le disuguaglianze:

$$\omega^{s+1} = \omega^s \cdot \omega \leq \alpha \cdot \omega \leq (\omega^s \cdot h) \cdot \omega = \omega^s \cdot (h \cdot \omega) = \omega^s \cdot \omega = \omega^{s+1}.$$

In particolare, visto che $\omega^2 \leq \omega^2 n + \omega m + k < \omega^3$, abbiamo:

- $(\omega^2 n + \omega m + k) \cdot \omega = \omega^3$ e quindi $(\omega^2 n + \omega m + k) \cdot \omega^2 = \omega^4$.

Possiamo finalmente calcolare

$$(\omega^2 n + \omega m + k)^2 = (\omega^2 n + \omega m + k) \cdot (\omega^2 n + \omega m + k) =$$

$$= (\omega^2 n + \omega m + k) \cdot \omega^2 n + (\omega^2 n + \omega m + k) \cdot \omega m + (\omega^2 n + \omega m + k) \cdot k = \omega^4 n + \omega^3 m + \omega^2 nk + \omega m + k.$$

In base alle uguaglianze che abbiamo mostrato, possiamo concludere che

$$(\omega^2 n + \omega m + k)^{\omega+2} = (\omega^2 n + \omega m + k)^\omega \cdot (\omega^2 n + \omega m + k)^2 = \omega^\omega \cdot (\omega^2 n + \omega m + k)^2 =$$

$$\omega^\omega \cdot (\omega^4 n + \omega^3 m + \omega^2 nk + \omega m + k) = \omega^{\omega+4} n + \omega^{\omega+3} m + \omega^{\omega+2} nk + \omega^{\omega+1} m + \omega^\omega k.$$

(2). Notiamo che $\alpha = 0$ soddisfa la tesi. Se $\alpha \neq 0$, deve essere $\alpha \geq \omega^\omega$, altrimenti si avrebbe $\omega^n \leq \alpha < \omega^{n+1}$ per qualche $n \in \omega$, e $(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha \geq \omega^2 \cdot \alpha \geq \omega^2 \cdot \omega^n = \omega^{n+2} > \omega^{n+1} > \alpha$. Adesso dividiamo α per ω^ω, e scriviamo $\alpha = \omega^\omega \beta + \rho$ dove $\beta \neq 0$ e $\rho < \omega^\omega$. Allora

$$(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha \;=\; (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega \beta + \rho) \;=\; (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^\omega \beta + (\omega^2 + \omega) \cdot \rho \;=\; \omega^\omega \beta + (\omega^2 + \omega) \cdot \rho.$$

Dunque $(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = \alpha$ se e solo se $\omega^\omega \beta + (\omega^2 + \omega) \cdot \rho = \omega^\omega \beta + \rho$ se e solo se $(\omega^2 + \omega) \cdot \rho = \rho$. Mostriamo ora che necessariamente $\rho = 0$. Se così non fosse, da $\rho < \omega^\omega$ seguirebbe che $\omega^n \leq \rho < \omega^{n+1}$ per qualche $n \in \omega$. Con lo stesso ragionamento visto all'inizio, si avrebbe allora che $(\omega^2 + \omega) \cdot \rho > \rho$, contro l'ipotesi. Concludiamo che α ha la proprietà richiesta se e solo se è un multiplo di ω^ω, cioè se e solo se ha la forma $\alpha = \omega^\omega \beta$ per un qualche ordinale β.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che se $2^{\aleph_1} = \aleph_{17}$ e se $\aleph_\omega^{\aleph_0} \geq \aleph_{\omega_1}$ allora $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

2. Sia κ un cardinale singolare, e supponiamo che la sequenza di cardinali $\langle 2^\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ sia definitivamente costante ed uguale a μ (cioè esiste $\xi < \kappa$ tale che per ogni $\xi \leq \nu < \kappa$ si ha $2^\nu = \mu$). Dimostrare che allora anche $2^\kappa = \mu$.

Soluzione. (1).

$$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leq \left(\aleph_\omega^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} \left(2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n\right) = \prod_{n<\omega} (\aleph_{17} \cdot \aleph_n) = \aleph_\omega^{\aleph_0} \leq \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}.$$

(2). Sia $\tau = \mathrm{cof}(\kappa)$. Visto che κ è limite perché singolare, esiste una sequenza crescente $\langle \kappa_i \mid i < \tau \rangle$ di cardinali $\kappa_i < \kappa$ tali che $\sup_{i<\tau} \kappa_i = \kappa$ e $\sum_{i<\tau} \kappa_i = \kappa$. Per ipotesi, esiste $\xi < \kappa$ tale che per ogni $\xi \leq \nu < \kappa$ si ha $2^\nu = 2^\xi$, e quindi $\sup_{i<\tau} 2^{\kappa_i} = \sup_{\nu<\kappa} 2^\nu = 2^\xi$. Infine, notiamo che

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i<\tau} \kappa_i} = \prod_{i<\tau} 2^{\kappa_i} = \left(\sup_{i<\tau} 2^{\kappa_i}\right)^\tau = \left(2^\xi\right)^\tau = 2^{\xi \cdot \tau} = 2^\xi.$$

Infatti, κ singolare implica che $\tau < \kappa$, quindi $2^\tau \leq 2^\xi$, quindi $2^{\xi\cdot\tau} = (2^\tau)^\xi \leq (2^\xi)^\xi = 2^\xi$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Mostrare un esempio di ordinale α di cofinalità numerabile tale che ogni funzione $g : \alpha \to \alpha$ crescente e continua ai limiti ammette almeno un punto fisso.

2. Dimostrare che se l'ordinale α ha cofinalità numerabile ed è anche additivamente chiuso[1], allora esistono funzioni $g : \alpha \to \alpha$ crescenti e continue ai limiti senza punti fissi.

Soluzione. (1). L'esempio più semplice è $\alpha = \omega + \omega$. Notiamo che se $n < \omega$ allora $f(n) < \omega$. Infatti, se esistesse $n < \omega$ con $f(n) \geq \omega$, per la crescenza di f si avrebbe che $f(n+k) \geq f(n)+k \geq \omega+k$ per ogni $k \in \omega$, e quindi, per la continuità, si avrebbe $f(\omega) = f(\bigcup_{k<\omega}(n+k)) = \bigcup_{k<\omega} f(n+k) \geq \bigcup_{k<\omega}(\omega + k) = \omega + \omega$, una contraddizione. Possiamo allora concludere che ω è un punto fisso, visto che

$$\omega \leq f(\omega) = f\left(\bigcup_{n<\omega} n\right) = \bigcup_{n\in\omega} f(n) \leq \omega.$$

(2). Visto che $\mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_0$, esiste una sequenza $\langle \xi_n \mid n \in \omega \rangle$ di elementi di α che è crescente e illimitata. Ci sarà conveniente prendere tutti gli ordinali ξ_n successori. Per induzione, definiamo $\alpha_0 = 0$, e $\alpha_{n+1} = \xi_m$ dove m è il più piccolo indice tale che $\xi_m > \alpha_n + \alpha_n$. La definizione è ben posta perché α è additivamente chiuso, e quindi $\alpha_n + \alpha_n < \alpha$. Notiamo che $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ è una successione di elementi di α che è crescente, illimitata, e tale che $\alpha_n + \alpha_n < \alpha_{n+1}$ per ogni n. Inoltre nessun α_n è un ordinale limite.

Adesso, per ogni $\beta \in \alpha$, prendiamo l'indice n tale che $\beta \in [\alpha_n, \alpha_{n+1})$ e definiamo $g(\beta) = \alpha_{n+1} + \beta$. Notiamo che $\alpha_{n+1} \leq g(\beta) < \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} < \alpha_{n+2}$, quindi $g([\alpha_n, \alpha_{n+1})) \subseteq [\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2})$, e di conseguenza g non ha punti fissi. Inoltre, chiaramente, $g : \alpha \to \alpha$ è una funzione crescente. Infine, se $\lambda \in \alpha$ è un ordinale limite e $\lambda \in [\alpha_n, \alpha_{n+1})$, allora notiamo che $\lambda = \bigcup_{\alpha_n \leq \beta < \lambda} \beta$ (per quest'ultima proprietà serve sapere che $\lambda \neq \alpha_n$, e questo è vero perché α_n è successore). Segue allora la continuità al limite, visto che:

$$g(\lambda) = \alpha_n + \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} (\alpha_n + \beta) = \bigcup_{\alpha_n \leq \beta < \lambda} (\alpha_n + \beta) = \bigcup_{\alpha_n \leq \beta < \lambda} g(\beta) = \bigcup_{\beta<\lambda} g(\beta).$$

[1] Ricordare che un ordinale α è *additivamente chiuso* se vale la proprietà: $\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \beta + \gamma < \alpha$.