Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 20 Settembre 2018

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Sia κ un cardinale infinito. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{f : \kappa \to \kappa \mid f \text{ è una bigezione}\}$.
2. $X_2 = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \mid f \text{ è periodica}\}$.
3. $X_3 = \{f : \mathbb{N} \to \kappa \mid f \text{ è periodica}\}$.
4. $X_4 = \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ partizione di } \kappa \text{ in } \nu \text{ pezzi}\}$, dove $\nu \leq \kappa$ cardinale infinito.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Per ogni $n, k, m \in \omega$ con $m \neq 0$, trovare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega \cdot n + k)^m$.
2. * Dimostrare che un ordinale α è additivamente chiuso se e solo se esiste θ moltiplicativamente chiuso ed esiste ζ tali che $\alpha = \theta^{\zeta+1}$.

   [Un ordinale α è *additivamente chiuso* quando $\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \beta + \gamma < \alpha$. Un ordinale θ è *moltiplicativamente chiuso* quando $\beta, \gamma < \theta \Rightarrow \beta \cdot \gamma < \theta$.[1]]

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che per ogni cardinale infinito κ si ha l'uguaglianza $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)}$, dove abbiamo denotato $2^{<\kappa} := \sup_{\nu<\kappa} 2^\nu$.
2. Sia κ un cardinale infinito e γ un ordinale qualunque. Dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$(\aleph_{\gamma+\omega})^\kappa \;=\; \max\{(\aleph_\gamma)^\kappa; (\aleph_{\gamma+\omega})^{\aleph_0}\}.$$

Esercizio 4. [8 punti]

1. Trovare tutte le coppie di ordinali (α, β) che soddisfano la seguente proprietà:[2]

$$A \in V_\alpha \implies \mathrm{Fun}(A, \beta) \in V_{\beta+1}.$$

2. Sia $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ORD}\}$ una sequenza di insiemi indicizzata sulla classe **ORD** di tutti gli ordinali. Supponiamo che:

   - $|X_\alpha| < |X_\beta|$ per ogni $\alpha < \beta$;
   - $|X_\lambda| = \sup\{|X_\alpha| \mid \alpha < \lambda\}$ se λ è limite.

   Dimostrare che per ogni ordinale α, esiste un cardinale $\kappa > \alpha$ tale che $|X_\kappa| = \kappa$.

[1] Si possono usare le caratterizzazioni viste a lezione.
[2] Ricordare che $\mathrm{Fun}(X, Y)$ denota l'insieme di tutte le funzioni $f : X \to Y$.