Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 5 Luglio 2018

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti]

1. Definisci esplicitamente una bigezione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Sia $\mathcal{B} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid R \text{ è un buon ordine su } \mathbb{N}\}$. Determina la cardinalità di $\mathcal{B}$.
3. Considera la seguente relazione di equivalenza su $\mathcal{B}$: "$R \equiv R' \Leftrightarrow (\mathbb{N}, R) \cong (\mathbb{N}, R')$ sono insiemi bene ordinati isomorfi". Determina la cardinalità dell'insieme quoziente $\mathcal{B}/\equiv$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Trovare tutti e soli gli ordinali η tali che $\omega^\omega \cdot \eta = \eta$.
2. Determinare tutti gli ordinali ϑ che soddisfano l'uguaglianza $\vartheta \cdot \omega = \vartheta + \omega$.
3. Dimostrare che per ogni ordinale limite $\lambda < \omega^\omega$ e per ogni $n < \omega$ si ha l'uguaglianza $\lambda \cdot \omega^n \cdot \lambda = \omega^n \cdot \lambda \cdot \lambda$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Individuare tutte le coppie di cardinali infiniti (ν, κ) che soddisfano la proprietà seguente:
    - Per ogni cardinale infinito ξ, se $\mu^\nu \leq \xi$ per ogni $\mu < \kappa$ allora $\kappa^\nu \leq \xi$.
2. Dimostrare che $\prod_{\alpha < \omega_1 + \omega} \aleph_\alpha = \aleph_{\omega_1+\omega}^{\aleph_1}$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Determinare le triple (α, β, κ) dove α e β sono ordinali e κ è un cardinale infinito, che soddisfano la proprietà seguente:[1]
$$A \in V_\alpha \implies [A]^\kappa \in V_\beta.$$
2. Sia $\omega_1 \leq \gamma < \omega_1 \cdot \omega$ e sia $f : \gamma \to \gamma$ una funzione crescente e continua ai limiti. Dimostrare che f ammette $\aleph_1$ punti fissi.

[1] Ricordare che $[A]^\kappa$ denota la famiglia di tutti i sottoinsiemi di A aventi cardinalità κ.