Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 22 Settembre 2017

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti]

1. Determinare la cardinalità dell'insieme $A = \mathrm{Fun}(\aleph_3, \aleph_4) = \{f \text{ funzione} \mid f : \aleph_3 \to \aleph_4\}$.
2. Al variare di n, m interi positivi, determinare la cardinalità dell'insieme $B_{nm} = \mathrm{Fun}(\aleph_n, \aleph_m)$.
3. Consideriamo l'insieme $C = \{f : \aleph_3 \to \aleph_\omega \mid f \text{ è limitata}\}$. È vero che $|C| = \aleph_\omega$?
   [Le possibili risposte sono: SI, NO, DIPENDE. In ogni caso, motivare la risposta.]

Soluzione. (1). $|A| = {\aleph_4}^{\aleph_3} =$ (applicando ripetutamente la formula di Hausdorff $(\kappa^+)^\nu = \kappa^\nu \cdot \kappa^+$ per i cardinali successori) $= {\aleph_0}^{\aleph_3} \cdot \aleph_1 \cdot \aleph_2 \cdot \aleph_3 \cdot \aleph_4 = 2^{\aleph_3} \cdot \aleph_4 = 2^{\aleph_3}$.

(2). Procedendo come sopra, per induzione si verifica che $|B_{nm}| = {\aleph_m}^{\aleph_n} = {\aleph_0}^{\aleph_n} \cdot \aleph_m = 2^{\aleph_n} \cdot \aleph_m$. Si hanno due casi: se $m \leq n+1$ allora $|B_{nm}| = 2^{\aleph_n} \cdot \aleph_m = 2^{\aleph_n}$; se $m > n+1$ allora $|B_{nm}| = \max\{2^{\aleph_n}, \aleph_m\}$.

(3). Notiamo che se $f : \aleph_3 \to \aleph_\omega$ è limitata, allora $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \aleph_n$ per un opportuno $n < \omega$. Dunque $C = \bigcup_{n<\omega} \mathrm{Fun}(\aleph_3, \aleph_n)$, e quindi $|C| = \sum_{n<\omega} {\aleph_n}^{\aleph_3} = \max\{\aleph_0, \sup_n {\aleph_n}^{\aleph_3}\} = \sup_n {\aleph_n}^{\aleph_3} = \sup_n \max\{2^{\aleph_3}, \aleph_n\} = \max\{2^{\aleph_3}, \aleph_\omega\}$. Concludiamo che la possibile risposta è DIPENDE; precisamente, $|C| = \aleph_\omega$ se e solo se $2^{\aleph_3} \leq \aleph_\omega$

Esercizio 2. [8 punti]

1. Sia κ un cardinale regolare non numerabile, e sia $f : \kappa \to \kappa$ una funzione crescente e continua ai limiti. Allora f ammette κ punti fissi.
2. Dimostrare che ciascuna delle ipotesi (κ regolare, κ non numerabile, f crescente, f continua ai limiti) è necessaria per avere l'esistenza di almeno un punto fisso.
3. Cerca di descrivere gli ordinali γ con la proprietà che esistono funzioni crescenti e continue ai limiti $f : \gamma \to \gamma$ prive di punti fissi.

Soluzione. (1). Visto che κ è regolare, basta trovare un un insieme illimitato di punti fissi. Per ogni $\alpha < \kappa$, cerchiamo quindi un punto fisso $\beta \geq \alpha$. Definiamo per ricorsione numerabile la successione $\beta_0 = \alpha$; $\beta_{n+1} = f(\beta_n)$. Visto che f è crescente, si ha che $f(\beta) \geq \beta$ per ogni β (visto a lezione), e dunque la successione $\{\beta_n\}$ è debolmente crescente. Prendiamo $\beta = \bigcup_n \beta_n \geq \alpha$. Notiamo che $\beta < \kappa$ perché κ ha cofinalità più che numerabile. Per la continuità di f, si ha che $f(\beta) = \bigcup_n f(\beta_n) = \bigcup_n \beta_{n+1} = \beta$.

(2a). κ non regolare, non numerabile, f crescente e continua.

La funzione $f : \aleph_\omega \to \aleph_\omega$ dove per ogni $\rho < \aleph_{n+1}$ si ha $f(\aleph_n + \rho) = \aleph_{n+1} + \rho$ soddisfa le ipotesi, ma è priva di punti fissi. (L'insieme $\{\aleph_n + \rho \mid \rho < \aleph_{n+1}\}$ coincide con l'intervallo di ordinali $[\aleph_n, \aleph_{n+1})$).

(2b). κ numerabile, regolare, f crescente e continua:

$f : \aleph_0 \to \aleph_0$ dove $f(n) = n + 1$ soddisfa le ipotesi (è continua a vuoto perché non esistono ordinali limite minori di ω), ma è priva di punti fissi.

(2c). κ regolare, non numerabile, f non crescente e continua.

Per ogni cardinale $\kappa > \aleph_0$, la funzione $f : \kappa \to \kappa$ dove $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, e $f(\beta) = 1$ per $\beta > 1$ soddisfa le ipotesi (è banalmente continua), ma è priva di punti fissi.

(2d). κ regolare, non numerabile, f crescente ma non continua.

Per ogni cardinale infinito κ, la funzione $f : \kappa \to \kappa$ dove $f(\beta) = \beta+1$ per ogni β soddisfa le ipotesi, ma è priva di punti fissi.

(3). Intanto γ deve essere limite; infatti, se $\gamma = \delta + 1$ e $f : \gamma \to \gamma$ è crescente, allora $f(\delta) \geq \delta$ e $f(\delta) < \gamma$ implicano che $f(\delta) = \delta$.

Inoltre γ deve avere cofinalità numerabile, altrimenti, procedendo come al punto (1), si dimostrerebbe che ogni $f : \gamma \to \gamma$ ha almeno un punto fisso.

Una condizione condizione sufficiente per ottenere la proprietà richiesta è la seguente:

($\star$) Esiste una successione crescente cofinale $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots$ in γ tale che $\alpha_{n+1} - \alpha_n \leq \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}$ per ogni n.[1]

Infatti in questo caso si può considerare la funzione $f : \gamma \to \gamma$ dove $f(\alpha_n + \rho) = \alpha_{n+1} + \rho$ per ogni $n < \omega$ e per ogni $\rho < \alpha_{n+1} - \alpha_n$. È facile verificare che f è crescente e continua, ma senza punti fissi perché l'immagine di elementi nell'intervallo $[\alpha_n, \alpha_{n+1})$ appartiene all'intervallo $[\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2})$. Notiamo che la condizione ($\star$) è soddisfatta per ogni γ cardinale infinito di cofinalità numerabile; tuttavia è facile trovare controesempi se γ ha cofinalità numerabile ma non è un cardinale (ad esempio, ogni $f : \omega_1 + \omega \to \omega_1 + \omega$ crescente e continua ha punti fissi).

Esercizio 3. [8 punti]

1. Scrivere l'ordinale $(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1)^3$ in forma normale di Cantor.
2. Trovare tutti e soli gli ordinali $\xi < \omega^\omega$ tali che $\omega \cdot \xi = \xi + \omega$.

Soluzione. (1). Notiamo anzitutto che vale la seguente uguaglianza:

($\star$) $(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) \cdot \omega = \omega^3$.

Infatti $\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega \leq (\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) \cdot \omega = \bigcup_n (\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) \cdot n \leq \bigcup_n (\omega^2 \cdot 6) \cdot n = \bigcup_k \omega^2 \cdot k = \omega^3$. Abbiamo quindi: $(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1)^2 = (\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) \cdot (\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) =$ (applicando la distributiva a destra) $[(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) \cdot \omega] \cdot \omega \cdot 5 + [(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) \cdot \omega] \cdot 2 + (\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1) =$ (usando la ($\star$)) $= \omega^3 \cdot \omega \cdot 5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1 = \omega^4 \cdot 5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1$. Con considerazioni del tutto analoghe, concludiamo che $(\omega^2 \cdot 5+\omega \cdot 2+1)^3 = (\omega^2 \cdot 5+\omega \cdot 2+1)^2 \cdot (\omega^2 \cdot 5+\omega \cdot 2+1) = \omega^6 \cdot 5+\omega^5 \cdot 2+\omega^4 \cdot 5+\omega^3 \cdot 2+\omega^2 \cdot 5+\omega \cdot 2+1$.

(2). Se $\xi < \omega$, allora $\xi + \omega = \omega = \omega \cdot \xi$ se e solo se $\xi = 1$. Supponiamo ora $\xi \geq \omega$, e prendiamo $1 \leq n < \omega$ tale che $\omega^n \leq \xi < \omega^{n+1}$. In questo caso $\xi + \omega < \omega^{n+1}$ mentre $\omega \cdot \xi \geq \omega^{n+1}$, e quindi $\xi + \omega \neq \omega \cdot \xi$. Concludiamo che l'unico ordinale $\xi < \omega^\omega$ che soddisfa la proprietà richiesta è $\xi = 1$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Determinare la classe di tutti gli ordinali γ che soddisfano la seguente proprietà:[2]

$$f : V_\omega \to \gamma \implies f \in V_\gamma$$

2. Determinare la classe di tutti gli ordinali γ che soddisfano la seguente proprietà:

$$f : V_{\omega_1} \to \gamma \implies f \in V_\gamma$$

[1] Ricordare che se $\xi < \zeta$, con $\zeta - \xi$ si denota quell'unico ordinale ρ tale che $\xi + \rho = \zeta$.

[2] V_γ denota il livello γ nella gerarchia cumulativa di von Neumann, definita ponendo per induzione transfinita $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ limite.

3. Esistono ordinali γ che soddisfano la seguente proprietà?

$$\mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \in V_\gamma$$

[Le possibili risposte sono: SI, NO, DIPENDE. In ogni caso, motivare la risposta.]

Soluzione. (1). Gli ordinali cercati sono tutti e soli gli ordinali γ tali che $\mathrm{cof}(\gamma) > \aleph_0$. Infatti, $|V_\omega| = \aleph_0$, e se $\mathrm{cof}(\gamma) > \aleph_0$, allora ogni funzione $f : V_\omega \to \gamma$ è limitata, quindi esiste $\alpha < \gamma$ con $\mathrm{Im}(f) \subseteq V_\alpha$. Ma allora $f \subseteq V_\omega \times V_\alpha$ e quindi $f \in V_\beta$ dove $\beta = \max\{\omega, \gamma\} + 2$. Infine, notiamo che $\beta < \gamma$ perché $\gamma > \omega$ è limite (avendo cofinalità infinita). Concludiamo che $f \in V_\gamma$.

Viceversa, se $\mathrm{cof}(\gamma) \leq \aleph_0 = |V_\omega|$, allora esiste una funzione $f : V_\omega \to \gamma$ illimitata. Chiaramente una tale $f \notin V_\gamma$, altrimenti avremmo che $\gamma = \bigcup_{a \in V_\omega} f(a) = \bigcup \mathrm{Im}(f) \in V_\gamma$, il che è assurdo.

(2). In modo del tutto analogo a sopra, si mostra che la proprietà richiesta vale se e solo se $\mathrm{cof}(\gamma) > |V_{\omega_1}| = \beth_{\omega_1}$.

(3). NO, non esistono ordinali γ con la proprietà richiesta. Infatti, sia per assurdo $\mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \in V_\gamma$. Se γ è limite esiste $\delta < \gamma$ con $\mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \in V_\delta$; e se $\gamma = \gamma' + 1$ è successore, allora $\mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \subseteq V_{\gamma'}$. In ogni caso, esiste $\delta < \gamma$ con $\mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \subseteq V_\delta$. Per ogni $\beta < \gamma$, prendiamo la funzione $f_\beta : \omega_1 \to \gamma$ tale che $f_\beta(0) = \beta$ e $f_\beta(\alpha) = 0$ per $\alpha \neq 0$. Per transitività, $\beta \in \{0, \beta\} \in (0, \beta) \in f_\beta \in \mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \subseteq V_\delta$ implica che $\beta \in V_\delta$. Ma allora avrei che $\gamma \subseteq V_\delta$, e quindi $\gamma \in V_{\delta+1} \subseteq V_\gamma$, il che è assurdo.