Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 22 Settembre 2017

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti]

1. Determinare la cardinalità dell'insieme $A = \mathrm{Fun}(\aleph_3, \aleph_4) = \{f \text{ funzione} \mid f : \aleph_3 \to \aleph_4\}$.
2. Al variare di n, m interi positivi, determinare la cardinalità dell'insieme $B_{nm} = \mathrm{Fun}(\aleph_n, \aleph_m)$.
3. Consideriamo l'insieme $C = \{f : \aleph_3 \to \aleph_\omega \mid f \text{ è limitata}\}$. È vero che $|C| = \aleph_\omega$?
   [Le possibili risposte sono: SI, NO, DIPENDE. In ogni caso, motivare la risposta.]

Esercizio 2. [8 punti]

1. Sia κ un cardinale regolare non numerabile, e sia $f : \kappa \to \kappa$ una funzione crescente e continua ai limiti. Allora f ammette κ punti fissi.
2. Dimostrare che ciascuna delle ipotesi (κ regolare, κ non numerabile, f crescente, f continua ai limiti) è necessaria per avere l'esistenza di almeno un punto fisso.
3. Cerca di descrivere gli ordinali γ con la proprietà che esistono funzioni crescenti e continue ai limiti $f : \gamma \to \gamma$ prive di punti fissi.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Scrivere l'ordinale $(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 1)^3$ in forma normale di Cantor.
2. Trovare tutti e soli gli ordinali $\xi < \omega^\omega$ tali che $\omega \cdot \xi = \xi + \omega$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Determinare la classe di tutti gli ordinali γ che soddisfano la seguente proprietà:[1]
$$f : V_\omega \to \gamma \implies f \in V_\gamma$$
2. Determinare la classe di tutti gli ordinali γ che soddisfano la seguente proprietà:
$$f : V_{\omega_1} \to \gamma \implies f \in V_\gamma$$
3. Esistono ordinali γ che soddisfano la seguente proprietà?
$$\mathrm{Fun}(\omega_1, \gamma) \in V_\gamma$$
   [Le possibili risposte sono: SI, NO, DIPENDE. In ogni caso, motivare la risposta.]

[1] V_γ denota il livello γ nella gerarchia cumulativa di von Neumann, definita ponendo per induzione transfinita $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ limite.