Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 13 Luglio 2017

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $Z_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ha tipo d'ordine } \omega\}$.[1]
2. $Z_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ è bene ordinato}\}$.
3. $Z_3 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ha il tipo d'ordine di } \mathbb{Q}\}$.

Soluzione. (1). $|Z_1| = 2^{\aleph_0}$. Infatti, per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $r + \mathbb{N} = \{r + n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha tipo d'ordine ω e quindi $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \leq |Z_1|$. Inoltre $|Z_1| \leq 2^{\aleph_0}$ perché Z_1 è incluso nella famigli $[\mathbb{R}]^{\aleph_0}$ dei sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$, ed abbiamo visto a lezione che $|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}| = |\mathbb{R}|^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

(2). $|Z_2| = 2^{\aleph_0}$. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è bene ordinato, allora ogni elemento $a \in A$ (tranne eventualmente il massimo) ha un elemento successore a^+, e possiamo prendere un elemento $q_a \in \mathbb{Q} \cap (a, a^+)$ (se a è il massimo di A, prendiamo come q_a un qualunque razionale maggiore di a). Visto che la funzione $a \mapsto q_a$ è iniettiva, si ha $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Quindi $|Z_2| \leq 2^{\aleph_0}$ perché è incluso nella famiglia $[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$ dei sottoinsiemi al più numerabili di $\mathbb{R}$, ed abbiamo visto a lezione che $|[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}| = |\mathbb{R}|^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Inoltre $Z_2 \supseteq Z_1$ e quindi $|Z_2| \geq |Z_1| = 2^{\aleph_0}$.

(3) $Z_3 = 2^{\aleph_0}$. La dimostrazione è simile al punto (1). Denotiamo con $\mathbb{Q}^-$ l'insieme dei razionali negativi, con $\mathbb{Q}^+$ i razionali positivi, e analogamente $\mathbb{R}^+$. Per ogni $r \in \mathbb{R}^+$, l'insieme $\mathbb{Q}_r := \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup (r + \mathbb{Q}^+) \in Z_3$ perché è isomorfo a $\mathbb{Q}$. Visto che $\mathbb{Q}_r \neq \mathbb{Q}_s$ per $r \neq s$, si ha $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}^+| \leq |Z_3|$. Inoltre $|Z_3| \leq 2^{\aleph_0}$ perché Z_3 è incluso nella famiglia $[\mathbb{R}]^{\aleph_0}$ dei sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$, e $|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Sia $f : \omega_1 + \omega_1 \to \omega_1 + \omega_1$ una funzione crescente. Dimostrare che se $\alpha < \omega_1$ allora $f(\alpha) < \omega_1$.
2. Sia $\omega_1 \leq \gamma < \omega_1 \cdot \omega$ e sia $f : \gamma \to \gamma$ una funzione crescente e continua ai limiti. Dimostrare che f ammette esattamente $\aleph_1$ punti fissi.

Soluzione. (1). Supponiamo per assurdo che esista $\alpha < \omega_1$ con $f(\alpha) \geq \omega_1$. Visto che f è crescente, si dimostra facilmente per induzione transfinita che $f(\alpha + \beta) \geq f(\alpha) + \beta$ per ogni β. Ma allora, visto che $\alpha + \omega_1 = \omega_1$, si ottiene $f(\omega_1) \geq f(\alpha) + \omega_1 \geq \omega_1 + \omega_1$, il che è assurdo.

(2). Abbiamo visto a lezione che ogni funzione $g : \omega_1 \to \omega_1$ crescente e continua ammette esattamente $\aleph_1$ punti fissi. Allora basta mostrare che $f(\beta) < \omega_1$ per ogni $\beta < \omega_1$; infatti, si considera la restrizione $g = f_{|\omega_1} : \omega_1 \to \omega_1$ e si applica il risultato menzionato sopra. Se per assurdo esistesse $\alpha < \omega_1$ con $f(\alpha) \geq \omega_1$, procedendo come nel punto (1), si otterebbe che $f(\omega_1) \geq \omega_1 + \omega_1$; $f(\omega_1 + \omega_1) \geq \omega_1 + \omega_1 + \omega_1$, e così via. Se $\gamma = \omega_1$ abbiamo già visto che la tesi vale. Se $\gamma > \omega_1$, prendo $n \neq 0$ tale che $\omega_1 \cdot n < \gamma \leq \omega_1 \cdot (n+1)$, ed ho che $\omega_1 \cdot n \in \gamma$ e $f(\omega_1 \cdot n) \geq \omega_1 \cdot (n+1) \geq \gamma$, il che è assurdo.

Esercizio 3. [8 punti]

[1] Cioè $(A, <)$ con l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$ è isomorfo all'ordinale $(\omega, \in)$ come insieme ordinato.

1. Scrivere l'ordinale $(\omega \cdot 3 + 2)^{\omega+2}$ in forma normale di Cantor.
2. Trovare tutti e soli gli ordinali ξ tali che $\omega \cdot \xi = \xi$.

Soluzione. (1). Notiamo che

$$\omega^\omega \ \leq \ (\omega \cdot 3 + 2)^\omega \ \leq \ (\omega^2)^\omega \ = \ \omega^{2\cdot\omega} \ = \ \omega^\omega,$$

e dunque $(\omega \cdot 3 + 2)^{\omega+2} = \omega^\omega \cdot (\omega \cdot 3 + 2)^2$. Adesso, $(\omega \cdot 3 + 2)^2 = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 6 + 2$, visto che

$$\omega^2 \ \leq \ (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \omega \ \leq \ (\omega \cdot 4) \cdot \omega \ = \ \omega \cdot (4 \cdot \omega) \ = \ \omega^2,$$

e inoltre

$$(\omega \cdot 3 + 2) \cdot 2 \ = \ \omega \cdot 3 + 2 + \omega \cdot 3 + 2 \ = \ \omega \cdot 6 + 2.$$

Si conclude che

$$(\omega \cdot 3 + 2)^{\omega+2} \ = \ \omega^\omega \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 6 + 2) \ = \ \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 6 + \omega^\omega \cdot 2$$

(2). Dividiamo ξ per ω^ω, e scriviamo $\xi = \omega^\omega \cdot \gamma + \rho$ dove $\rho < \omega^\omega$. Allora

$$\omega \cdot \xi \ = \ \omega \cdot (\omega^\omega \cdot \gamma + \rho) \ = \ \omega \cdot \omega^\omega \cdot \gamma + \omega \cdot \rho \ = \ \omega^\omega \cdot \gamma + \omega \cdot \rho.$$

Allora $\omega \cdot \xi = \xi$ se e solo se $\omega^\omega \cdot \gamma + \omega \cdot \rho = \omega^\omega \cdot \gamma + \rho$ se e solo se $\omega \cdot \rho = \rho$ se e solo se $\rho = 0$. Quindi ξ ha la proprietà richiesta se e solo se ha la forma $\xi = \omega^\omega \cdot \gamma$ per un qualche ordinale γ.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Trovare una successione crescente di cardinali infiniti $\langle \nu_i \mid i \in \omega + 1 \rangle$ tale che

$$\prod_{i<\omega+1} \nu_i \ < \ \left(\sup_{i<\omega+1} \nu_i \right)^{\aleph_0}.$$

2. Dimostrare che un ordinale β ha la proprietà $\beth_\beta = |\mathcal{P}(\beta)|$ se e solo se $\beta = \kappa + 1$ dove $\beth_\kappa = \kappa$.

Soluzione. (1). Un possibile esempio (non certo l'unico!) è il seguente. Sia $\nu_i = \aleph_i$ per $i < \omega$, e sia $\nu_\omega = \kappa > (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$. Chiaramente la successione $\langle \nu_i \mid i < \omega + 1 \rangle$ è crescente. Il prodotto infinito

$$\prod_{i<\omega+1} \nu_i \ = \ \left(\prod_{i<\omega} \aleph_i \right) \cdot \kappa \ = \ (\aleph_\omega)^{\aleph_0} \cdot \kappa \ = \ \kappa.$$

Prendendo un cardinale $\kappa > (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$ di cofinalità numerabile si ha allora

$$\left(\sup_{i<\omega+1} \nu_i \right)^{\aleph_0} \ = \ \kappa^{\aleph_0} \ > \ \kappa \ = \ \prod_{i<\omega+1} \nu_i.$$

Un cardinale κ con le proprietà richieste è ad esempio $\kappa = \aleph_{\gamma+\omega}$ dove $\aleph_\gamma = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

(2). Se κ è un punto fisso della funzione *beth*, allora $|\mathcal{P}(\kappa + 1)| = |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa = 2^{\beth_\kappa} = \beth_{\kappa+1}$.

Viceversa, supponiamo che $2^{|\beta|} = |\mathcal{P}(\beta)| = \beth_\beta$. Notiamo anzitutto che β è infinito. Un tale β non può essere limite, altrimenti $|\beta| < 2^{|\beta|} = \beth_\beta \Rightarrow |\beta| < \beth_\gamma$ per qualche $\gamma < \beta$, e quindi $2^{|\beta|} \leq 2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1} < \beth_\beta$, contro l'ipotesi. Un modo alternativo per vedere che β non è limite è che altrimenti $\mathrm{cof}(\beth_\beta) = \mathrm{cof}(\beta)$ e si otterebbe la contraddizione $|\beta| < \mathrm{cof}(2^{|\beta|}) = \mathrm{cof}(\beth_\beta) = \mathrm{cof}(\beta) \leq |\beta|$.[2]

Notiamo ora che β non può essere un successore di un successore. Infatti, se fosse $\beta = \gamma + 2$ per qualche γ, si avrebbe $|\mathcal{P}(\beta)| = |\mathcal{P}(\gamma)| = 2^{|\gamma|} \leq 2^{\beth_\delta} = \beth_{\delta+1} < \beth_\beta$, contro l'ipotesi.

Resta da considerare il caso $\beta = \lambda + 1$ dove λ è limite. Se per assurdo fosse $\lambda < \beth_\lambda$, allora sarebbe $\lambda < \beth_\gamma$ per qualche $\gamma < \lambda$, e si avrebbe $|\mathcal{P}(\beta)| = |\mathcal{P}(\lambda)| = 2^{|\lambda|} \leq 2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1} < \beth_\lambda < \beth_\beta$.

[2] Ricordare che per ogni cardinale infinito ν si ha $\mathrm{cof}(2^\nu) > \nu$.