Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 20 Giugno 2017

Cognome e nome:..

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Determinare la cardinalità delle seguenti famiglie di insiemi:

1. $\mathcal{F}_1 = \{X \subseteq \omega_2 \mid X \text{ è finito}\}$;
2. $\mathcal{F}_2 = \{X \subseteq \omega_2 \mid |X| = \aleph_0\}$;
3. $\mathcal{F}_3 = \{X \subseteq \omega_2 \mid |X| = \aleph_1\}$;
4. $\mathcal{F}_4 = \{X \subseteq \omega_2 \mid |X| = \aleph_2\}$;
5. $\mathcal{F}_5 = \{X \subseteq \omega_2 \mid X \text{ è illimitato}\}$;
6. $\mathcal{F}_6 = \{X \subseteq \omega_2 \mid X \text{ è limitato}\}$.

Soluzione. Useremo la seguente formula:

($\star$) *Siano $\nu \leq \kappa$ cardinali infiniti. Allora l'insieme $[\kappa]^\nu = \{X \subseteq \kappa \mid |X| = \nu\}$ dei sottoinsiemi di κ di cardinalità ν ha cardinalità $|[\kappa]^\nu| = \kappa^\nu$.*

Dimostriamo la ($\star$). Denotiamo con $[\kappa]^{\leq\nu} = \{X \subseteq \kappa \mid |X| \leq \nu\}$. È immediato verificare che la funzione $\Phi : \mathrm{Fun}(\nu, \kappa) \to [\kappa]^{\leq\nu}$ che associa ad ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ la sua immagine $\mathrm{Im}(f)$ è una funzione suriettiva, e quindi $|[\kappa]^\nu| \leq |[\kappa]^{\leq\nu}| \leq |\mathrm{Fun}(\nu, \kappa)| = \kappa^\nu$. Ricordiamo che ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è identificata con il suo grafico, e quindi è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\nu \times \kappa$ di cardinalità ν, cioè $\mathrm{Fun}(\nu, \kappa) \subseteq [\nu \times \kappa]^\nu$. Ma allora si ottiene anche l'altra disuguaglianza $\kappa^\nu = |\mathrm{Fun}(\nu, \kappa)| \leq |[\nu \times \kappa]^\nu| = |[\kappa]^\nu|$, dove abbiamo usato il fatto che $|\nu \times \kappa| = \max\{\nu, \kappa\} = \kappa$.

(1). Notiamo che $\mathcal{F}_1 = \bigcup_{n\in\omega} [\omega_2]^n$, dove $[\omega_2]^n = \{X \subset \omega_2 \mid |X| \leq n\}$. Ricordiamo che per ogni naturale $n \geq 1$ e e per ogni cardinale infinito μ si ha $\mu^n = \mu$, e quindi $(\aleph_2)^n = \aleph_2$. Visto che le le funzioni $\Psi_n : (\omega_2)^n \to [\omega_2]^n$ dove $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \{a_1, \ldots, a_n\}$ sono suriettive, usando la ($\star$) si ha che

$$|\mathcal{F}_1| \;=\; \max\left\{\sup_{n\in\omega} |[\omega_2]^n; |\omega|\right\} \;=\; \max\left\{\sup_{n\in\omega} (\aleph_2)^n; \aleph_0\right\} \;=\; \max\{\aleph_2; \aleph_0\} \;=\; \aleph_2.$$

(2). $|\mathcal{F}_2| = |[\aleph_2]^{\aleph_0}| = (\aleph_2)^{\aleph_0}$. Usando due volte la formula di Hausdorff si ottiene che $(\aleph_2)^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = \max\{2^{\aleph_0}, \aleph_2\}$.

(3). $|\mathcal{F}_3| = |[\aleph_2]^{\aleph_1}| = (\aleph_2)^{\aleph_1}$. Usando la formula di Hausdorff si ottiene che $(\aleph_2)^{\aleph_1} = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_2 = \max\{2^{\aleph_1}, \aleph_2\} = 2^{\aleph_1}$.

(4). $|\mathcal{F}_4| = |[\aleph_2]^{\aleph_2}| = (\aleph_2)^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2}$.

(5). Visto che ω_2 è un cardinale regolare, si ha che $X \subseteq \omega_2$ è illimitato se e solo se $|X| = \aleph_2$. Dunque $\mathcal{F}_5 = 2^{\aleph_2}$ perché $\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4$.

(6). Da quanto detto sopra, $X \subseteq \omega_2$ è limitato se e solo se $|X| < \aleph_2$, cioè se e solo se X finito, o $|X| = \aleph_0$, o $|X| = \aleph_1$. Ma allora $\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$, e quindi

$$|\mathcal{F}_6| \;=\; |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| + |\mathcal{F}_3| \;=\; \max\{|\mathcal{F}_1|; |\mathcal{F}_2|; |\mathcal{F}_3|\} \;=\; \max\{\aleph_2; \max\{2^{\aleph_0}, \aleph_2\}; 2^{\aleph_1}\} \;=\; 2^{\aleph_1}.$$

Esercizio 2. [9 punti] Sia $g : \omega_1 \to \omega_1$ e sia $\mathrm{Fix}(g) = \{\alpha \in \omega_1 \mid g(\alpha) = \alpha\}$ l'insieme dei suoi punti fissi.

1. Dimostrare che per ogni g crescente e continua[1], l'insieme $\mathrm{Fix}(g)$ ha cardinalità $\aleph_1$.

2. Dimostrare che sia l'ipotesi "g crescente" che l'ipotesi "g continua" sono necessarie per la validità della proprietà (1) di sopra.

3. Vale la proprietà (1) di sopra se sostituiamo l'ipotesi di "g crescente" con l'ipotesi di "g illimitata"? (Giustificare la risposta).

Soluzione. (1). Ricordiamo che ω_1 è un cardinale regolare, e quindi ogni sottoinsieme illimitato $X \subseteq \omega_1$ ha cardinalità $|X| = |\omega_1| = \aleph_1$. Per raggiungere la tesi basta allora mostrare che per ogni $\gamma < \omega_1$ esiste un punto fisso $\alpha \geq \gamma$. Definiamo induttivamente:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \gamma \\ \alpha_{n+1} = g(\alpha_n). \end{cases}$$

Poiché g è crescente, $g(\beta) \geq \beta$ per ogni β e quindi la successione $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ è debolmente crescente. Il punto $\alpha = \sup_n \alpha_n \geq \gamma$ è punto fisso; infatti dalla continuità di g segue che:

$$g(\alpha) \;=\; \sup_n g(\alpha_n) \;=\; \sup_n \alpha_{n+1} \;=\; \sup_n \alpha_n \;=\; \alpha.$$

(2). Una qualunque funzione costante g è banalmente continua (ma non crescente) ed ha un unico punto fisso. Questo mostra che l'ipotesi "g crescente" è necessaria.

La funzione $g(\alpha) = \alpha + 1$ è crescente (ma non continua) ed è priva di punti fissi. Questo mostra che l'ipotesi "g continua" è necessaria.

(3). La risposta è positiva. Per dimostrarlo si usa un'idea simile a quella vista sopra al punto (1). Basta mostrare che per ogni $\gamma < \omega_1$ esiste $\alpha \geq \gamma$ punto fisso. Definiamo induttivamente:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \gamma \\ \alpha_{n+1} = \min\{\beta > \alpha_n, g(\alpha_n) \mid g(\beta) > \alpha_n, g(\alpha_n)\}. \end{cases}$$

Notiamo che l'insieme $\{g(\beta) \mid \beta \leq \max\{\alpha_n, g(\alpha_n)\}\}$ è un insieme numerabile, e dunque limitato in ω_1; di conseguenza, visto che g è illimitata, il suo complementare $\{g(\beta) \mid \beta > \alpha_n, g(\alpha_n)\}$ è illimitato, e la definizione di α_{n+1} è ben posta. Chiaramente $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ e $\langle g(\alpha_n) \mid n \in \omega \rangle$ sono sequenze crescenti dove $\alpha_{n+1} > g(\alpha_n)$ e $g(\alpha_{n+1}) > \alpha_n$ per ogni $n \in \omega$. Il punto $\alpha = \sup_n \alpha_n > \gamma$ è punto fisso; infatti, vista la continuità di g, si ha:

$$g(\alpha) \;=\; \sup_n g(\alpha_n) \;=\; \sup_n g(\alpha_{n+1}) \;\geq\; \sup_n \alpha_n \;=\; \alpha \;=\; \sup_n \alpha_{n+1} \;\geq\; \sup_n g(\alpha_n) \;=\; g(\alpha).$$

Esercizio 3. [8 punti]

1. Trovare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 3)^3$.

2. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 2 + 3$ e $\omega \cdot 2 + 7$.

Soluzione. (1). Usando la distributività a destra, si ottiene che $\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 3 = \omega \cdot (\omega \cdot 5 + 3)$. Inoltre $(\omega \cdot 5 + 3) \cdot \omega = \omega^2$, come dimostrato dalle seguenti disuguaglianze:

$$\omega^2 \;\leq\; (\omega \cdot 5 + 3) \cdot \omega \;\leq\; (\omega \cdot 6) \cdot \omega \;=\; \omega \cdot (6 \cdot \omega) \;=\; \omega^2.$$

[1] Cioè tali che per ogni ordinale limite $\lambda < \omega_1$ si ha $g(\lambda) = \sup_{\gamma<\lambda} g(\gamma)$.

Otteniamo allora:

$$
\begin{aligned}
(\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 3)^3 &= \omega \cdot (\omega \cdot 5 + 3) \cdot \omega \cdot (\omega \cdot 5 + 3) \cdot \omega \cdot (\omega \cdot 5 + 3) \;=\; \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^2 \cdot (\omega \cdot 5 + 3) \\
&= \omega^5 \cdot (\omega \cdot 5 + 3) \;=\; \omega^6 \cdot 5 + \omega^5 \cdot 3,
\end{aligned}
$$

che è la forma normale di Cantor cercata.

(2). Notiamo che $(\omega \cdot 2 + 7) \cdot \omega = \omega^2$; infatti:

$$\omega^2 \;\leq\; (\omega \cdot 2 + 7) \cdot \omega \;\leq\; (\omega \cdot 3) \cdot \omega \;=\; \omega \cdot (3 \cdot \omega) \;=\; \omega^2.$$

Allora $(\omega \cdot 2 + 7) \cdot \omega \cdot 5 = \omega^2 \cdot 5$. Possiamo concludere che la divisione euclidea si ottiene prendendo come quoziente $\omega \cdot 5$, e come resto $\omega \cdot 2 + 3 < \omega \cdot 2 + 7$.

Esercizio4. [6 punti] Sia $\langle V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ la gerarchia cumulativa di von Neumann, e sia $\langle \beth_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ la sequenza dei *beths*.[2]

1. Dimostrare che $|V_\alpha| = \beth_\alpha$ se e solo se $\alpha > \omega^2$.

2. Fissato un ordinale α infinito, determinare tutti e soli gli ordinali β che soddisfano la seguente proprietà:

   - Se $f : V_\beta \to V_\alpha$ allora $f \in V_\alpha$.

Soluzione. (1). Per induzione transfinita, si dimostra che $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$ per ogni ordinale α. Infatti $|V_\omega| = \aleph_0 = \beth_0$; al passo successore $|V_{\omega+\alpha+1}| = |\mathcal{P}(V_{\omega+\alpha})| = 2^{|V_{\omega+\alpha}|} =$ (per ip. induttiva) $= 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$; al passo limite,

$$|V_{\omega+\lambda}| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} V_{\omega+\alpha}| = \max\{\sup_{\alpha<\lambda} |V_{\omega+\alpha}|, |\lambda|\} = \text{(ip. indutt.)} = \max\{\sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha, |\lambda|\} = \max\{\beth_\lambda, |\lambda|\} = \beth_\lambda.$$

Se $\alpha < \omega$ è finito allora V_n è finito, quindi $|V_n| < \aleph_0 = \beth_0$ e $|V_n| \neq \beth_n$. Se $\omega \leq \alpha < \omega^2$, allora $\alpha = \omega \cdot n + k$ dove $n, k \in \omega$ con $n \neq 0$. Ma allora, per la formula di sopra, $|V_\alpha| = \beth_{\omega\cdot(n-1)+k} < \beth_\alpha$. Infine, se $\alpha \geq \omega^2$, allora $\omega + \alpha = \alpha$ e quindi $|V_\alpha| = |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.

(2). Sono tutti e soli gli ordinali β tali che $|V_\beta| < \mathrm{cof}(\alpha)$. Vediamo perchè. Se $\alpha = \gamma + 1$ è successore, allora $\mathrm{cof}(\alpha) = 1$, e la condizione di sopra si riduce a $|V_\beta| < 1$, cioè $V_\beta = \emptyset$, cioè $\beta = 0$. In questo caso l'unica $f : V_\beta \to V_\alpha$ è la funzione vuota, e banalmente $\emptyset \in V_1 \subseteq V_\alpha$. Viceversa, se $\beta \geq 1$, allora $\emptyset \in V_\beta$ e posso prendere una funzione $f : V_\beta \to V_\alpha$ tale che $f(\emptyset) = V_\gamma$. Una tale funzione $f \notin V_\alpha = \mathcal{P}(V_\gamma)$, altrimenti $(\emptyset, V_\gamma) \in f \in V_{\gamma+1} \Rightarrow (\emptyset, V_\gamma) \in V_\gamma$. Questo non è possibile perché $V_\gamma \in \{\emptyset, V_\gamma\} \in \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, V_\gamma\}\} \;=\; (\emptyset, V_\gamma) \in V_\gamma$, da cui seguirebbe $V_\gamma \in V_\gamma$.

Possiamo quindi assumere α limite. Assumiamo prima che $|V_\beta| < \mathrm{cof}(\alpha)$. Data $f : V_\beta \to V_\alpha$, per ogni $x \in V_\beta$ prendo $R(x) = \min\{\gamma \mid f(x) \in V_\gamma\}$. L'insieme di ordinali $\{R(x) \mid x \in V_\beta\} \subseteq \alpha$ ha cardinalità $\leq |V_\beta|$ e quindi è limitato. Ma allora esiste $\delta < \alpha$ con $\delta > R(x)$ per ogni $x \in V_\beta$. Questo garantisce che $\mathrm{Im}(f) \subseteq V_\delta$ e quindi $\mathrm{Im}(f) \in V_\alpha$. Inoltre, $\beta \leq |V_\beta| < \mathrm{cof}(\alpha) \leq \alpha$, e quindi $V_\beta \in V_\alpha$. Visto che sia dominio che immagine di f appartengono a V_α, possiamo concludere che $f \in V_\alpha$.

Se invece $|V_\beta| \geq \mathrm{cof}(\alpha)$, allora esiste una funzione $f : V_\beta \to \alpha$ illimitata. Chiaramente $f : V_\beta \to V_\alpha$, ma $f \notin V_\alpha$, altrimenti avremmo che $\mathrm{Im}(f) \in V_\alpha$, e quindi anche $\alpha = \bigcup \mathrm{Im}(f) \in V_\alpha$, il che è assurdo.

[2] Ricordiamo le definizioni per ricorsione transfinita: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ è limite; $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ se λ è limite.