Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 20 Gennaio 2015
Soluzioni

Esercizio 1. Considerare i seguenti ordinali:

$(a)\ \omega^{\omega}$; $(b)\ \omega^{\omega_1}$; $(c)\ {\omega_1}^{\omega}$; $(d)\ {\omega_1}^{\omega_1}$; $(e)\ \omega^{\omega_2}$; $(f)\ {\omega_1}^{\omega_2}$; $(g)\ {\omega_2}^{\omega}$; $(h)\ {\omega_2}^{\omega_1}$; $(i)\ {\omega_2}^{\omega_2}$

1. Calcolarne le cardinalità.
2. Calcolare i cardinali che si ottengono considerando le esponenziazioni di sopra come esponenziazioni tra cardinali (cioè ponendo $\aleph_0$ al posto di ω, $\aleph_1$ al posto di ω_1, $\aleph_2$ al posto di ω_2).
3. Lavorando in ZFC (e quindi senza assumere ipotesi supplementari come l'ipotesi del continuo), prendere le cardinalità trovate nel punto (2) e disporle in ordine in tutti i casi in cui questo sia possibile, specificando se si possono dimostrare disuguaglianze strette $<$ o solo disuguaglianze deboli $\leq$. Indicare inoltre eventuali cardinalità tra le quali non è possibile dimostrare la confrontabilità.
4. Assumendo l'*ipotesi generalizzata del continuo*, specificare quali dei cardinali trovati nel punto (2) sono uguali, e disporli poi in ordine strettamente crescente.

Soluzione. (1). Abbiamo visto a lezione che se α e β sono ordinali infiniti, allora $|\alpha^{\beta}| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Di conseguenza:

$$|\omega^{\omega}| = \aleph_0\,;\ |\omega^{\omega_1}| = |{\omega_1}^{\omega}| = |{\omega_1}^{\omega_1}| = \aleph_1\,;\ |\omega^{\omega_2}| = |{\omega_1}^{\omega_2}| = |{\omega_2}^{\omega}| = |{\omega_2}^{\omega_1}| = |{\omega_2}^{\omega_2}| = \aleph_2.$$

(2). Ricordando che $\nu^{\mu} = 2^{\mu}$ quando $\nu \leq 2^{\mu}$ (μ infinito), si ottengono i seguenti cardinali:

- $\kappa_1 = |{\aleph_0}^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}$.
- $\kappa_2 = |{\aleph_0}^{\aleph_1}| = 2^{\aleph_1}$.
- $\kappa_3 = |{\aleph_1}^{\aleph_0}| =$ (per Hausdorff) $= {\aleph_0}^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.
- $\kappa_4 = |{\aleph_1}^{\aleph_1}| = 2^{\aleph_1}$.
- $\kappa_5 = |{\aleph_0}^{\aleph_2}| = 2^{\aleph_2}$.
- $\kappa_6 = |{\aleph_1}^{\aleph_2}| = 2^{\aleph_2}$
- $\kappa_7 = |{\aleph_2}^{\aleph_0}| =$ (per Hausdorff) $= {\aleph_0}^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_2$.
- $\kappa_8 = |{\aleph_2}^{\aleph_1}| =$ (per Hausdorff) $= {\aleph_0}^{\aleph_1} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_1}$.
- $\kappa_9 = |{\aleph_2}^{\aleph_2}| = 2^{\aleph_2}$.

(3). Chiaramente $\kappa_1 = \kappa_3$, $\kappa_2 = \kappa_4 = \kappa_8$, e $\kappa_5 = \kappa_6 = \kappa_9$. Ciò che possiamo dimostrare in ZFC sono soltanto le seguenti disuguaglianze deboli:

$$2^{\aleph_0} \ \leq\ 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 \ \leq\ 2^{\aleph_1} \ \leq\ 2^{\aleph_2}.$$

(4). Usando l'*ipotesi generalizzata del continuo* GCH, la prima disuguaglianza di sopra è una uguaglianza, mentre la seconda e la terza sono disuguaglianze strette. Infatti, assumendo GCH, si ha che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ e $2^{\aleph_2} = \aleph_3$.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che se $\langle \kappa_i \mid i \in \mu \rangle$ è una sequenza non-decrescente di cardinali infiniti indicizzata su un cardinale infinito μ, allora $\prod_{i<\mu} \kappa_i = \left(\sup_{i<\mu} \kappa_i\right)^{\mu}$.

2. Trovare una successione di cardinali infiniti $\langle \kappa_n \mid n \in \omega \rangle$ tale che

$$\prod_{n\in\omega} \kappa_n \; < \; \left(\sup_{n\in\omega} \kappa_n\right)^{\aleph_0}.$$

Soluzione. (1). Questo risultato è stato dimostrato a lezione.

(2). Prendiamo $\kappa_n = \aleph_0$ per $n \geq 1$, e prendiamo $\kappa_0 = \nu > \mathfrak{c}$ un cardinale maggiore del continuo. Allora il prodotto infinito

$$\prod_{n\in\omega} \kappa_n \; = \; \nu \cdot \left(\prod_{n\geq 1} \aleph_0\right) \; = \; \nu \cdot (\aleph_0)^{\aleph_0} \; = \; \nu \cdot \mathfrak{c} \; = \; \nu.$$

Prendendo un cardinale $\nu > \mathfrak{c}$ di cofinalità numerabile si ha allora

$$\left(\sup_{n\in\omega} \kappa_n\right)^{\aleph_0} \; = \; \nu^{\aleph_0} \; = \; \nu^{\mathrm{cof}(\nu)} \; > \; \nu \; = \; \prod_{n\in\omega} \kappa_n.$$

Un esempio di cardinale ν con le proprietà richieste è, ad esempio, $\nu = \aleph_{\mathfrak{c}+\omega}$.

Esercizio 3.

1. Sia $I = [\alpha, \beta)$ un intervallo di ordinali avente cardinalità $\aleph_1$. Dimostrare che sono equivalenti le due seguenti proprietà:

   (a) Ogni sottoinsieme $X \subseteq I$ di cardinalità $\aleph_1$ è illimitato in I.

   (b) $\beta = \alpha + \omega_1$.

2. Sia $g : \omega_1 \cdot 2 \to \omega_1 \cdot 2$ una funzione crescente. Dimostrare che se $\gamma < \omega_1$ allora $g(\gamma) < \omega_1$.

Soluzione. (1). Supponiamo prima che $\beta = \alpha + \omega_1$, e prendiamo $X \subseteq [\alpha, \alpha + \omega_1)$ di cardinalità $\aleph_1$. Se per assurdo $X \subseteq [\alpha, \alpha+\omega_1)$ fosse limitato, allora esisterebbe $\eta \in [\alpha, \alpha+\omega_1)$ tale che $\xi \leq \eta$ per ogni $\xi \in X$. Ma $\alpha \leq \eta < \alpha+\omega_1 \Rightarrow \eta = \alpha+\zeta$ per un opportuno $\zeta < \omega_1$. Abbiamo allora che $X \subseteq [\alpha, \alpha+\zeta)$, e quindi $|X| \leq |\zeta| < \aleph_1$, contro l'ipotesi.

(2). Se per assurdo esistesse $\gamma < \omega_1$ con $g(\gamma) \geq \omega_1$ allora, per la crescenza di g, si avrebbe che $g([\gamma, \omega_1)) \subseteq [\omega_1, \omega_1 \cdot 2)$. Ma l'intervallo $[\gamma, \omega_1)$ ha cardinalità $\aleph_1$, e quindi anche la sua immagine $g([\gamma, \omega_1))$ ha cardinalità $\aleph_1$ (g è iniettiva perché crescente). Per la proprietà (1), possiamo concludere $g([\gamma, \omega_1))$ è illimitato in $[\omega_1, \omega_1 \cdot 2)$, ma questo è assurdo, perchè allora dovrebbe essere $g(\omega_1) \geq \omega \cdot 2$.

Esercizio 4. Consideriamo la *gerarchia cumulativa* di Von Neumann: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ è limite.

1. Dimostrare che $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$ per ogni α. (Ricordiamo che i cardinali "beth" sono definiti ponendo $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, e $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ se λ è limite.)

2. Siano κ un cardinale infinito e α un ordinale. Dimostrare che $\mathrm{cof}(\alpha) > \kappa$ se e solo se ogni sottoinsieme $X \subseteq V_\alpha$ di cardinalità minore o uguale κ appartiene a V_α.

Soluzione. (1). Procediamo per induzione transfinita. La base $\alpha = 0$ vale perché $|V_\omega| = \aleph_0$. Infatti $V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ è unione di insieme finiti di cardinalità arbitrariamente grande (che V_n sia finito e di cardinalità $\geq n$ si può verificare facilmente per induzione sui numeri naturali n). Il passo induttivo $\alpha + 1$ segue subito dall'ipotesi induttiva e dalle definizioni:

$$|V_{\omega+\beta+1}| \; = \; |\mathcal{P}(V_{\omega+\beta})| \; = \; 2^{|V_{\omega+\beta}|} \; = \; 2^{\beth_\beta} \; = \; \beth_{\beta+1}.$$

Se λ è un ordinale limite, $V_{\omega+\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_{\omega+\alpha}$. Per ogni $\alpha < \lambda$, si ha che $\beth_\alpha = |V_{\omega+\alpha}| \leq |V_{\omega+\lambda}|$ e quindi $\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \leq |V_{\omega+\lambda}|$. Per l'altra disuguaglianza, se fosse $|V_{\omega+\lambda}| < \beth_\lambda$, allora esisterebbe $\gamma < \lambda$ tale che $|V_{\omega+\lambda}| < \beth_\gamma = |V_{\omega+\gamma}|$. Ma questo è assurdo perché $V_{\omega+\gamma}$ è un sottoinsieme di $V_{\omega+\lambda}$.

(2). Supponiamo prima $\mathrm{cof}(\alpha) > \kappa$. Anzitutto notiamo che α deve essere un ordinale limite. Allora per ogni $x \in X$, possiamo definire $\rho_x = \min\{\beta < \alpha \mid x \in V_\beta\}$. L'insieme $\Gamma = \{\rho_x \mid x \in X\}$ è un sottoinsieme di α avente cardinalità $|\Gamma| \leq |X| \leq \kappa$. Dalla nostra ipotesi sulla cofinalità di α segue che X è limitato, e dunque esiste $\gamma < \alpha$ tale che $\rho_x \leq \gamma$ per ogni $x \in X$. Questo ci dice che $X \subseteq V_\gamma$ e quindi $X \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\alpha$.

Viceversa, supponiamo per assurdo che $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \kappa$. Se $\alpha = \beta + 1$ è un successore, prendiamo $X = \{\beta\}$. Banalmente $|X| = 1\mathrm{cot}(\alpha)$. Inoltre $\beta \notin V_\beta \Leftrightarrow X = \{\beta\} \notin \mathcal{P}(V_\beta) = V_\alpha$. Supponiamo allora α limite, e prendiamo un sottoinsieme illimitato $X \subseteq \alpha$ di cardinalità $|X| = \mathrm{cof}(\alpha) \leq \kappa$. Se un tale X appartenesse a V_α, allora anche $\alpha = \sup_{x\in X} x = \bigcup X \in V_\alpha$, e questo non è possibile.