Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 16 Settembre 2014 – Soluzioni

Esercizio 1.

1. Scrivere il prodotto tra ordinali $(\omega \cdot 4 + 9) \cdot (\omega + 3)$ in forma normale di Cantor.

2. Scrivere l'esponenziale tra ordinali $(\omega \cdot 3 + 5)^{\omega \cdot 4+2}$ in forma normale di Cantor.

Soluzione. (1). Ricordiamo che se $n \in \omega$ e $\alpha \geq \omega$ allora $n + \alpha = \alpha$. Infatti, usando la differenza tra ordinali, possiamo prendere β tale che $\alpha = \omega + \beta$, ed abbiamo $n + \alpha = (n + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha$. Passiamo ora al nostro problema. Usando la proprietà distributiva a destra, si ha:

$$(\omega \cdot 4 + 9) \cdot 2 \;=\; \omega \cdot 4 + (9 + \omega \cdot 4) + 9 \;=\; \omega \cdot 4 + \omega \cdot 4 + 9 \;=\; \omega \cdot (4 + 4) + 9 \;=\; \omega \cdot 8 + 9.$$

Iterando, è facile verificare che per ogni $1 \leq k < \omega$ si ha che $(\omega \cdot 4 + 9) \cdot k = \omega \cdot (4k) + 9$, e quindi

$$(\omega \cdot 4 + 9) \cdot \omega \;=\; \bigcup_{k \in \omega} (\omega \cdot 4 + 9) \cdot k \;=\; \bigcup_{k \in \omega} (\omega \cdot (4k) + 9) \;=\; \bigcup_{n \in \omega} \omega \cdot n \;=\; \omega^2.$$

Concludiamo allora che

$$(\omega \cdot 4 + 9) \cdot (\omega + 3) \;=\; (\omega \cdot 4 + 9) \cdot \omega + (\omega \cdot 4 + 9) \cdot 3 \;=\; \omega^2 + \omega \cdot (12) + 9.$$

(2). Analogamente a sopra, si verifica che $(\omega \cdot 3 + 5) \cdot n = \omega \cdot 3n + 5$ per ogni $n \geq 1$. Allora $(\omega \cdot 3 + 5) \cdot \omega = \sup_n (\omega \cdot 3 + 5) \cdot n = \omega^2$, e quindi

$$(\omega \cdot 3 + 5)^2 \;=\; (\omega \cdot 3 + 5) \cdot \omega \cdot 3 + (\omega \cdot 3 + 5) \cdot 5 \;=\; \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5.$$

In modo del tutto simile, si ottiene che $(\omega \cdot 3 + 5)^3 = (\omega \cdot 3 + 5)^2 \cdot (\omega \cdot 3 + 5) = (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot \omega \cdot 3 + (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot 5 = \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 15 + \omega \cdot 15 + 3$. Iterando il procedimento, per $n \geq 3$ si ottiene che $(\omega \cdot 3 + 5)^n = \omega^n \cdot 3 + \omega^{n-1} \cdot 15 + \ldots + \omega \cdot 15 + 3$ e quindi $(\omega \cdot 3 + 5)^\omega = \bigcup_{n \in \omega} (\omega \cdot 3 + 5)^n = \omega^\omega$. Possiamo allora concludere che

$$(\omega \cdot 3 + 5)^{\omega \cdot 4 + 2} \;=\; [(\omega \cdot 3 + 5)^\omega]^4 \cdot (\omega \cdot 3 + 5)^2 \;=\; \omega^{\omega \cdot 4} \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \;=\; \omega^{\omega \cdot 4 + 2} \cdot 3 + \omega^{\omega \cdot 4 + 1} \cdot 15 + \omega^{\omega \cdot 4} \cdot 5.$$

Esercizio 2. Siano κ, ν cardinali infiniti.

1. Dimostrare che se $f : \nu \to \kappa$ è iniettiva e illimitata allora $\kappa = \sum_{\alpha < \nu} |f(\alpha)|$.

2. Dimostrare che nel punto precedente, sia l'ipotesi di iniettività che quella di illimitatezza sono necessarie.

Soluzione. (1). Anzitutto, visto che f è iniettiva, $\nu \leq \kappa$. Inoltre, poiché f è illimitata, $\kappa = \bigcup_{\alpha < \nu} f(\alpha)$. Usando la formula per le somme infinite, si ha allora

$$\kappa \;=\; \Big| \bigcup_{\alpha < \nu} f(\alpha) \Big| \;\leq\; \sum_{\alpha < \nu} |f(\alpha)| \;\leq\; \sum_{\alpha < \nu} \kappa \;=\; \kappa \cdot \nu \;=\; \kappa.$$

(2). La funzione identità $f : \aleph_0 \to \aleph_1$ è iniettiva, ma $\sum_{n \in \aleph_0} |f(n)| = \sum_{n \in \aleph_0} n = \aleph_0 < \aleph_1$. Questo esempio mostra che l'ipotesi di illimitatezza è necessaria. Vediamo ora un esempio che dimostra che anche l'ipotesi di iniettività è necessaria. Sia $f : \aleph_1 \to \aleph_0$ una qualunque funzione suriettiva. Chiaramente f è illimitata ma non iniettiva e

$$\sum_{\alpha<\aleph_1} |f(\alpha)| \;=\; \max\left\{\sup_{\alpha<\aleph_1} |f(\alpha)|,\, \aleph_1\right\} \;=\; \max\{\aleph_0, \aleph_1\} \;=\; \aleph_1 \;>\; \aleph_0.$$

Esercizio 3. Dimostrare che le due seguenti condizioni sull'ordinale γ sono equivalenti:[1]

1. Ogni funzione $f : V_{\omega+1} \to V_\gamma$ appartiene a V_γ.
2. $\mathrm{cof}(\gamma) > \mathfrak{c}$ dove $\mathfrak{c}$ è la cardinalità del continuo.

Soluzione. Ricordiamo che $|V_\omega| = \aleph_0$ e quindi $|V_{\omega+1}| = |\mathcal{P}(V_\omega)| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ ha la cardinalità del continuo. Dimostriamo prima l'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2). Se per assurdo $\mathrm{cof}(\gamma) \leq \mathfrak{c}$ allora si può trovare una funzione $f : V_{\omega+1} \to \gamma$ illimitata. Ma allora $f \notin V_\gamma$, perché altrimenti se $f \in V_\gamma$ allora anche $\gamma = \bigcup \mathrm{imm}(f) \in V_\gamma$, il che non è possibile.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{cof}(\gamma) > \mathfrak{c}$. In particolare γ è limite. Visto che $\gamma > \mathfrak{c} > \omega+1$, e dunque $V_{\omega+1} \in V_\gamma$, per raggiungere la tesi basterà dimostrare che anche $\mathrm{imm}(f) \in V_\gamma$.[2] Per ogni $x \in V_{\omega+1}$ denotiamo con $\alpha_x = \min\{\alpha < \gamma \mid f(x) \in V_\alpha\}$. L'insieme $X = \{\alpha_x \mid x \in V_{\omega+1}\}$ è un sottoinsieme di γ avente cardinalità $|X| \leq |V_{\omega+1}| = \mathfrak{c}$. Vista l'ipotesi $\mathrm{cof}(\gamma) > \mathfrak{c}$, l'insieme X è necessariamente limitato, e quindi $\delta = \sup X < \gamma$. Segue direttamente dalle definizioni che $\mathrm{imm}(f) \subseteq V_\delta$, e quindi $\mathrm{imm}(f) \in V_\gamma$.

Esercizio 4. Supponiamo che $(\aleph_\gamma)^{\aleph_2} \leq \aleph_{\omega_1+1}$ per ogni $\gamma < \omega_1$. Dimostrare che allora

$$(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_2} \;=\; (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}.$$

Soluzione. Usando la formula per i prodotti infiniti, si ottiene

$$\prod_{\gamma<\omega_1} (\aleph_\gamma)^{\aleph_2} \;=\; \left(\prod_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma\right)^{\aleph_2} \;=\; \left[\left(\sup_{\gamma<\omega_1} \aleph_\gamma\right)^{\aleph_1}\right]^{\aleph_2} \;=\; \left[(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}\right]^{\aleph_2} \;=\; (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_2}.$$

D'altra parte:

$$\prod_{\gamma<\omega_1} (\aleph_\gamma)^{\aleph_2} \;=\; \left(\sup_{\gamma<\omega_1} (\aleph_\gamma)^{\aleph_2}\right)^{\aleph_1} \;\leq\; (\aleph_{\omega_1+1})^{\aleph_1}.$$

Infine, usando la formula di Hausdorff per i cardinali successori, $(\aleph_{\omega_1+1})^{\aleph_1} = (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1+1} = (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}$. Infatti, $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} \geq \aleph_{\omega_1+1}$ visto che $\mathrm{cof}(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1$ e dunque $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} > \aleph_{\omega_1}$. Abbiamo così completato la dimostrazione della disuguaglianza $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_2} \leq (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1}$. L'altra disuguaglianza è banale.

---

[1] Ricordiamo che la gerarchia di von Neumann era così definita per ricorsione transfinita: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, e $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ successore.

[2] Si ricordi che se $A, B \in V_\lambda$ dove λ è limite, allora ogni funzione $f : A \to B$ appartiene a V_λ.