Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 3 Giugno 2014

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Dimostrare che se α è un ordinale infinito, allora esistono ed unici λ limite e $n \in \omega$ tali che $\alpha = \lambda + n$.

2. Siano $\alpha > 1$ e $\beta > 0$. Dimostrare che α^β è successore se e solo se α è successore e $\beta \in \omega$.

Soluzione. (1) Soluzione #1. Dimostriamo l'esistenza precedendo per induzione su $\alpha \geq \omega$. La base induttiva $\alpha = \omega$ è banale prendendo $\lambda = \omega$ e $n = 0$. Se α è un ordinale limite, di nuovo la tesi è banale prendendo $\lambda = \alpha$ e $n = 0$. Se $\alpha = \beta + 1$ è successore, per ipotesi induttiva $\beta = \lambda + n$ dove λ è limite e $n \in \omega$. Ma allora $\alpha = (\lambda + n) + 1 = \lambda + (n + 1)$, dove chiaramente $n + 1 \in \omega$.

Per dimostrare l'unicità supponiamo che $\alpha = \lambda + n = \lambda' + n'$ dove λ, λ' sono ordinali limite e $n, n' \in \omega$. Se per assurdo $\lambda \neq \lambda'$, diciamo $\lambda < \lambda'$, allora $\alpha = \lambda + n < \lambda' \leq \lambda' + n' = \alpha$, una contraddizione. Dunque $\lambda = \lambda'$ ed abbiamo $\lambda + n = \lambda + n'$. Per raggiungere la tesi basta notare che se $n < n'$ allora si ottiene l'assurdo $\alpha = \lambda + n < \lambda' = \alpha$, e analogamente se $n > n'$.

Soluzione #2. Effettuiamo la divisione euclidea di λ per ω. Allora esistono, ed unici, ordinali γ e $\rho < \omega$ tali che $\alpha = \omega \cdot \gamma + \rho$. Visto che $\alpha \geq \omega$, l'ordinale $\gamma \geq 1$, e si può facilmente dimostrare per induzione su $\gamma \geq 1$ che il prodotto $\omega \cdot \gamma$ è un ordinale limite. Notiamo infine che $\gamma \neq \gamma' \Leftrightarrow \omega \cdot \gamma \neq \omega \cdot \gamma'$. Allora ponendo $\lambda = \omega \cdot \gamma$ e $n = \rho$ si ottiene la tesi, inclusa la proprietà di unicità.

(2). Supponiamo prima che $\alpha = \gamma + 1$ sia successore e che $\beta = k \in \omega$. Per induzione su $k \geq 1$, verifichiamo che $(\gamma + 1)^k$ è successore. La base è ovvia. Per il passo induttivo, notiamo che

$$(\gamma + 1)^{k+1} = (\gamma + 1)^k(\gamma + 1) = (\gamma + 1)^k\gamma + (\gamma + 1)^k$$

è successore, perchè $(\gamma + 1)^k$ lo è per l'ipotesi induttiva.

Viceversa, notiamo che se α è limite e se $\beta = \gamma + 1$ è successore, allora $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \alpha^\gamma \cdot \xi$ è limite perché α è limite. Se β è limite, visto che $\gamma \mapsto \alpha^\gamma$ è strettamente crescente (ricordiamo che $\alpha > 1$), allora $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$ è limite. Dunque sia $\alpha = \gamma+1$ che β sono necessariamente successori. Per raggiungere la tesi resta da vedere che $\beta \in \omega$. Se per assurdo β fosse infinito allora, per la (1), posso scrivere $\beta = \lambda + k$ dove λ è limite e $1 \leq k < \omega$. Dimostriamo ora per induzione su k che $(\gamma + 1)^{\lambda+k}$ è limite, ottenendo l'assurdo. Se $k = 1$, allora $(\gamma + 1)^{\lambda+k} = (\gamma + 1)^\lambda(\gamma + 1) = (\gamma + 1)^\lambda\gamma + (\gamma + 1)^\lambda$ è limite, perchè $(\gamma + 1)^\lambda$ lo è (abbiamo già osservato sopra che α^β è limite se β è limite). Nel passo induttivo $k = n + 1$, notiamo che

$$(\gamma + 1)^{\lambda+n+1} = (\gamma + 1)^{\lambda+n}(\gamma + 1) = (\gamma + 1)^{\lambda+n} \cdot \gamma + (\gamma + 1)^{\lambda+n}$$

che è limite, perchè $(\gamma + 1)^{\lambda+n}$ è limite per ipotesi induttiva.

Esercizio 2. Sia α un ordinale, e sia $\langle A_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ una α-sequenza crescente insiemi, cioè tale che $A_\beta \subsetneq A_{\beta'}$ per $\beta < \beta'$.

1. Dimostrare in dettaglio che $|\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta| = \max\{|\alpha|, \sup_{\beta<\alpha} |A_\beta|\}\}$.

2. Si può generalizzare il risultato di sopra a I-sequenze crescenti $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ dove $(I,<)$ è un insieme totalmente ordinato qualunque?[1]

Soluzione. (1). Come prima cosa, rendiamo quella unione disgiunta ed applichiamo la formula per le somme infinite di cardinali. A questo scopo consideriamo ad esempio gli insiemi $A'_\beta = A_\beta \times \{\beta\}$. Chiaramente $|A'_\beta| = |A_\beta|$ e $A'_\beta \cap A'_\gamma = \emptyset$ per $\beta \neq \gamma$. Inoltre è immediato verificare che $|\bigcup_{\beta<\alpha} A_\alpha| \leq |\bigcup_{\beta<\alpha} A'_\beta|$; ad esempio la funzione $a \mapsto (a,\gamma)$ dove $\gamma = \min\{\beta \mid a \in A_\beta\}$ è una funzione iniettiva. Dunque si ha:

$$|\bigcup_{\beta<\alpha} A_\alpha| \leq |\bigcup_{\beta<\alpha} A'_\beta| = \sum_{\beta<\alpha} |A'_\beta| = \max\left\{|\alpha|, \sup_{\beta<\alpha} |A'_\beta|\right\} = \max\left\{|\alpha|, \sup_{\beta<\alpha} |A_\beta|\right\}.$$

Per dimostrare l'altra disuguaglianza, notiamo intanto che $\sup_{\beta<\alpha} |A_\beta| \leq |\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma|$, visto che per ogni β si ha banalmente $|A_\beta| \leq |\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma|$. Inoltre, prendiamo $x_0 \in A_0$ e, usando l'*assioma di scelta*, per ogni $\beta > 0$ prendiamo un elemento $x_\beta \in A_\beta$ con $x_\beta \notin \bigcup_{\gamma\in\beta} A_\gamma$. La sequenza $\langle x_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ è una sequenza iniettiva di elementi di $\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$, e quindi $|\alpha| \leq |\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma|$.

(2). La risposta è NO. Un controesempio si ottiene considerando $(I,<) = (\mathbb{R},<)$, e la sequenza $\langle X_r \mid r \in \mathbb{R}\rangle$, dove $X_r = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$. Dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ segue subito si tratta di una sequenza crescente. Inoltre $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} X_r = \mathbb{Q}$ è numerabile, mentre $\max\{|\mathbb{R}|, \sup_{r\in\mathbb{R}} |X_r|\} = \max\{\mathfrak{c}, \aleph_0\} = \mathfrak{c}$.

Esercizio 3. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze cardinali:

1. ${\aleph_\omega}^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \cdot {\aleph_\omega}^{\aleph_0}$.

2. $(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \cdot (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$.

Soluzione. Verrà usata la formula per i prodotti infiniti:

$$\prod_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha = \left(\sup_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha\right)^\nu,$$

dove ν è un cardinale infinito, e $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \nu\rangle$ è una sequenza debolmente decrescente di cardinali infiniti. Notiamo che:

$$(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1} = \left((\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_{\omega+n}\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} (\aleph_{\omega+n})^{\aleph_1}.$$

Adesso, applicando n volte la formula di Hausdorff $(\kappa^+)^\nu = \kappa^\nu \cdot \kappa^+$, si ottiene che

$$(\aleph_{\omega+n})^{\aleph_1} = {\aleph_\omega}^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega+n}.$$

Dunque possiamo continuare la catena di uguaglianze iniziata sopra in questo modo:

$$\prod_{n<\omega} (\aleph_{\omega+n})^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} {\aleph_\omega}^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega+n} = \left({\aleph_\omega}^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega+\omega}\right)^{\aleph_0} = {\aleph_\omega}^{\aleph_1} \cdot (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}.$$

Analogamente a sopra, di nuovo applicando la formula per i prodotti infiniti e la formula di Hausdorff, abbiamo

$${\aleph_\omega}^{\aleph_1} = \left({\aleph_\omega}^{\aleph_1}\right)^{\aleph_0} = \prod_{n<\omega} {\aleph_n}^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} {\aleph_0}^{\aleph_1} \cdot \aleph_n = \left(2^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} \cdot {\aleph_\omega}^{\aleph_0}.$$

[1] Se la risposta è sì, darne una dimostrazione; se la risposta è no, trovare un controesempio.

Mettendo insieme le uguaglianze viste sopra, concludiamo che

$$(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_1} = {\aleph_\omega}^{\aleph_1} \cdot (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} \cdot {\aleph_\omega}^{\aleph_0} \cdot (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} \cdot (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}.$$

Esercizio 4. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Per ogni ordinale α, se $A \in V_\alpha$ allora $|A| < |V_\alpha|$.

2. Sia λ limite. Allora una funzione $f \in V_{\lambda+1} \Longleftrightarrow \mathrm{dom}(f), \mathrm{imm}(f) \in V_{\lambda+1}$.

Soluzione. (1). Procediamo per induzione transfinita su α. La base $\alpha = 0$ è vera a vuoto, perchè non ci sono insiemi che appartengono a $V_0 = \emptyset$. Se $\alpha = \beta + 1$ è un successore, ricordiamo che per definizione $V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)$, e quindi $A \in V_{\beta+1} \Leftrightarrow A \subseteq V_\beta$. Usando il Teorema di Cantor si ottiene che $|A| \leq |V_\beta| < |\mathcal{P}(V_\beta)| = |V_{\beta+1}|$. Se λ è un ordinale limite, $A \in V_\lambda \Rightarrow A \in V_\gamma$ per un opportuno $\gamma < \lambda$. Per ipotesi induttiva si ha che $|A| < |V_\gamma| \leq |V_\lambda|$ (ricordiamo che $V_\gamma \subseteq V_\lambda$).

(2). Ricordiamo anzitutto che una funzione f è uno speciale insieme di coppie ordinate (a, b), e che ogni coppia ordinata era definita come *coppia di Kuratowski* $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Supponiamo che $f \in V_{\lambda+1}$. Per ogni $a \in \mathrm{dom}(f)$, prendiamo b tale che $(a, b) \in f$. Visto che $f \in V_{\lambda+1} \Leftrightarrow f \subseteq V_\lambda$, segue che $(a, b) \in V_\lambda$. Abbiamo allora $a \in \{a\} \in (a, b) \in V_\lambda \Rightarrow a \in V_\lambda$ (qui abbiamo usato il fatto che gli insiemi V_λ della gerarchia di von Neumann sono transitivi). Abbiamo così verificato l'inclusione $\mathrm{dom}(f) \subseteq V_\lambda$, da cui la tesi $\mathrm{dom}(f) \in V_{\lambda+1}$. La dimostrazione che l'immagine $\mathrm{imm}(f) \in V_{\lambda+1}$ è del tutto analoga.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{dom}(f), \mathrm{imm}(f) \in V_{\lambda+1}$, cioè $\mathrm{dom}(f), \mathrm{imm}(f) \subseteq V_\lambda$. Per ogni $(a, b) \in f$, si ha che $a, \in \mathrm{dom}(f) \subseteq V_\lambda$ e $b \in \mathrm{imm}(f) \subseteq V_\lambda$, e quindi $a, b \in V_\lambda$. Visto che λ è limite, esiste $\gamma < \lambda$ tale che $a, b \in V_\gamma$. Ma allora $\{a\}, \{a, b\} \in V_{\gamma+1}$ e la coppia di Kuratowski $(a, b) \in V_{\gamma+2} \subseteq V_\lambda$ (poichè λ è limite, $\gamma < \lambda \Rightarrow \gamma + 2 < \lambda$). Abbiamo così dimostrato l'inclusione $f \subseteq V_\lambda$, cioè la tesi $f \in V_{\lambda+1}$.