Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 16 Luglio 2012

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Trovare la forma normale di Cantor degli ordinali $(\omega^3+\omega)^5$ e $(\omega^5+\omega^3)^3$.
2. Caratterizzare gli ordinali α, β tali che $\alpha \cdot \omega^\beta = \omega^\beta$.

Esercizio 2. Dato un insieme A, si consideri la seguente proprietà:[1]

$$\mathrm{EXT}_A: \quad \forall x, y \in A\ [\forall t \in A\ (t \in x \leftrightarrow t \in y)] \to x = y.$$

1. Mostrare un esempio di insieme A tale che EXT_A *non* vale.
2. Dimostrare che se A è transitivo allora EXT_A vale.
3. Vale l'implicazione inversa nella (2)?

Esercizio 3. Si consideri la gerarchia cumulativa di von Neumann:

$$V_0 = \emptyset\,; \quad V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)\,; \quad V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \text{ se } \lambda \text{ limite.}$$

1. Dimostrare che per ogni cardinale infinito κ vale la seguente equivalenza:
$$\kappa < \mathrm{cof}(\alpha) \iff \mathrm{Fun}(\kappa, V_\alpha) \subseteq V_\alpha.$$
2. Dimostrare che per ogni α, esiste ed unica funzione *rango* $\rho_\alpha : V_\alpha \to \alpha$ tale che
$$\rho_\alpha(\emptyset) = 0\,; \quad \rho_\alpha(A) = \sup\{\rho_\alpha(a)+1 \mid a \in A\} \quad \text{se } A \neq \emptyset.$$

Esercizio 4. Per ogni cardinale infinito ν denotiamo con $\gimel(\nu) = \nu^{\mathrm{cof}(\nu)}$ (funzione classe *"ghimel"*), e con $2^{<\nu} = \sup_{\mu<\nu} 2^\mu$. Dimostrare le proprietà seguenti, dove κ è un cardinale infinito:

1. Se κ è regolare, allora $2^\kappa = \gimel(\kappa)$.
2. Se κ è limite, allora $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.
3. Se κ è singolare ed esiste $\zeta < \kappa$ con $2^\zeta = 2^{<\kappa}$, allora $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.
4. Se κ è singolare e l'insieme $\{2^\mu \mid \mu < \kappa\}$ non ha massimo, allora $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$.

[1] Si tratta della *relativizzazione* all'universo A dell'*Assioma di Estensionalità*.