Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 25 Giugno 2012
Soluzioni

Esercizio 1. Assumiamo che valga l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni α. Determinare le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{A \subseteq \omega_{11} \mid |A| = \aleph_0\}$
2. $X_2 = \{A \subseteq \omega_{11} \mid |A| = \aleph_5\}$.
3. $X_3 = \{f : \omega_{11} \to \omega_5 \mid f \text{ è illimitata}\}$.
4. $X_4 = \{f : \omega_5 \to \omega_{11} \mid f \text{ è strettamente crescente}\}$.

Soluzione. Ricordiamo il seguente risultato, dimostrato a lezione: *Se $\nu \leq \kappa$ sono cardinali infiniti, allora $|[\kappa]^\nu| = \kappa^\nu$, dove $[\kappa]^\nu = \{A \subseteq \kappa : |A| = \nu\}$.*

(1). $X_1 = [\omega_{11}]^{\aleph_0}$, dunque $|X_1| = (\aleph_{11})^{\aleph_0}$ = (con ripetute applicazioni del Teorema di Hausdorff) $= \max\{\aleph_{11}, 2^{\aleph_0}\} = \max\{\aleph_{11}, \aleph_1\} = \aleph_{11}$.

(2). Si procede esattamente come sopra. Visto che $X_2 = [\omega_{11}]^{\aleph_5}$, si ha $|X_2| = (\aleph_{11})^{\aleph_5} = \max\{\aleph_{11}, 2^{\aleph_5}\} = \max\{\aleph_{11}, \aleph_6\} = \aleph_{11}$.

(3). Intanto $X_3 \subset \mathrm{Fun}(\omega_{11}, \omega_5)$, dunque $|X_3| \leq (\aleph_5)^{\aleph_{11}} = 2^{\aleph_{11}}$. Per ottenere la disuguaglianza inversa, un possibile modo è il seguente. Per ogni $A \in \mathcal{P}(\omega_{11} \setminus \omega_5)$, sia $f_A : \omega_{11} \to \omega_5$ la funzione definita ponendo

$$f_A(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \in \omega_5 \\ \chi_A(\alpha) & \text{se } \alpha \in \omega_{11} \setminus \omega_5 \end{cases}$$

dove $\chi_A : \omega_{11} \setminus \omega_5 \to \{0, 1\}$ è la funzione caratteristica di A. Notiamo che f_A è suriettiva visto che $f\restriction_{\omega_5}$ è l'identità, quindi $f_A \in X_3$. Ponendo $\Phi(A) = f_A$ si ottiene allora una funzione iniettiva $\Phi : \mathcal{P}(\omega_{11} \setminus \omega_5) \to X_3$. Poiché $|\omega_{11} \setminus \omega_5| = \aleph_{11}$, segue che $2^{\aleph_{11}} = |\mathcal{P}((\omega_{11} \setminus \omega_5)| \leq |X_3|$. Concludiamo che $|X_3| = 2^{\aleph_{11}} = \aleph_{12}$.

(4). L'insieme $X_4 \subseteq \mathrm{Fun}(\aleph_5, \aleph_{11})$, dunque $|X_4| \leq (\aleph_{11})^{\aleph_5} = \max\{\aleph_{11}, 2^{\aleph_5}\} = \max\{\aleph_{11}, \aleph_6\} = \aleph_{11}$. Notiamo ora che per ogni $\alpha \in \omega_{11}$ e per ogni $\beta \in \omega_5$, si ha $\alpha + \beta \in \omega_{11}$ (per verificarlo basta notare ad esempio che la cardinalità dell'ordinale $|\alpha + \beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < \aleph_{11}$). Dunque, per ogni $\alpha \in \omega_{11}$ possiamo definire la funzione $f_\alpha : \omega_5 \to \omega_{11}$ ponendo $f_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$. È immediato verficare che f_α è strettamente crescente. Ponendo $\Phi(\alpha) = f_\alpha$ si ottiene una funzione iniettiva $\Phi : \omega_{11} \to X_4$, ed otteniamo così anche la disuguaglianza inversa $\aleph_{11} \leq |X_4|$.

Esercizio 2. Siano $\alpha, \beta > 2$ ordinali.

1. Dimostrare che $\alpha^\beta = \alpha \cdot \beta$ se e solo se $\alpha^\beta = \beta$.
2. Dimostrare che per ogni α esistono β arbitrariamente grandi tali che $\alpha^\beta = \alpha \cdot \beta$.

Soluzione. (1). Supponiamo prima $\alpha^\beta = \beta$. Se β è infinito allora $1+\beta=\beta$ e si ha $\alpha^\beta = \alpha^{1+\beta} = \alpha \cdot \alpha^\beta = \alpha \cdot \beta$. Notiamo che se β è finito l'ipotesi non è mai soddisfatta, come possiamo facilmente verificare per induzione su $n > 2$. Per $n = 3$, si ha $\alpha^3 \geq 3^3 > 3$. Il passo induttivo segue notando che $\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot n \geq$ (per ipotesi induttiva) $n \cdot \alpha > n \cdot 3 > n+1$.

Supponiamo ora $\alpha^\beta = \alpha \cdot \beta$. Se β è infinito la tesi vale perché se per assurdo fosse $\alpha^\beta \neq \beta$ allora avremmo che $\alpha^\beta > \beta \Rightarrow \alpha^\beta = \alpha^{1+\beta} = \alpha \cdot \alpha^\beta > \alpha \cdot \beta$, contro l'ipotesi. Anche in questo caso, l'ipotesi non è mai verificata quando β è finito. Mostriamo infatti per induzione che $\alpha^n > \alpha \cdot n$ per ogni naturale $n > 2$. Per $n = 3$ abbiamo che $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \geq \alpha \cdot 3 \cdot 3 > \alpha \cdot 3$. Per il passo induttivo, $\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha \geq$ (per ipotesi induttiva) $\alpha \cdot n \cdot \alpha \geq \alpha \cdot (3n) > \alpha \cdot (n+1)$.

(2). Fissato un ordinale γ, si pone per ricorsione numerabile:

$$\begin{cases} \beta_0 = \gamma \\ \beta_{n+1} = \alpha^{\beta_n} \end{cases}$$

È immediato verificare che $\langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle$ è una successione debolmente crescente. Dimostriamo ora che l'ordinale $\beta = \sup_n \beta_n \geq \gamma$ è tale che $\alpha^\beta = \beta$, da cui la tesi per il punto 1. Se $\beta = \beta_k$ per qualche k, allora per la crescenza debole della sequenza $\langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle$, avremmo che $\beta_k = \beta_{k+1} = \beta$ e quindi $\alpha^\beta = \alpha^{\beta_k} = \beta_{k+1} = \beta$. Altrimenti, se $\beta_k < \beta$ per ogni k, l'ordinale β è limite e si ha:

$$\alpha^\beta \;=\; \bigcup_{\delta<\beta} \alpha^\delta \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \alpha^{\beta_n} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \beta_{n+1} \;=\; \beta.$$

Esercizio 3. Consideriamo la *gerarchia di von Neumann*: $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ è limite. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{F} \in V_\alpha \;\Rightarrow\; \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\alpha$.
2. $A \in V_\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{TC}(A) \in V_\alpha$.[1]
3. $A \in V_\omega \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{TC}(A)| < \aleph_0$.[2]

Soluzione. (1) Procediamo per induzione transfinita su α. Se $\alpha = 0$ la tesi è vera a vuoto. Se $\alpha = \beta + 1$ è un ordinale successore, allora $F \in \mathcal{F} \in V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta) \Rightarrow F \in V_\beta$ e quindi, visto che V_β è transitivo, $F \subseteq V_\beta$. Ma allora $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \subseteq V_\beta \Rightarrow \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_\alpha$. Infine, se $\mathcal{F} \in V_\lambda$ dove λ è un ordinale limite, allora $\mathcal{F} \in V_\alpha$ per un opportuno $\alpha < \lambda$. Applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene allora che $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\alpha \subseteq V_\lambda$, come voluto.

(2). Procediamo per induzione transfinita. Se $\alpha = 0$ la tesi è vera a vuoto. Se $A \in V_{\beta+1}$, allora $A \subseteq V_\beta$. Visto che V_β è un insieme transitivo che include A, abbiamo $\mathrm{TC}(A) \subseteq V_\beta$, e quindi $\mathrm{TC}(A) \in V_{\beta+1}$. Infine, se $A \in V_\lambda$ dove λ è limite, allora $A \in V_\alpha$ per un opportuno $\alpha < \lambda$, e dall'ipotesi induttiva segue che $\mathrm{TC}(A) \in V_\alpha \subseteq V_\lambda$.

(3). $\Rightarrow$ Se $A \in V_\omega$, allora $A \in V_n$ per un opportuno $n \in \omega$ e quindi, per la transitività di V_n, si ha $A \subseteq V_n$. Ma allora $\mathrm{TC}(A)$ è finito perché $\mathrm{TC}(A) \subseteq V_n$ e tutti gli insiemi V_n sono finiti.

$\Leftarrow$ Notiamo anzitutto che se un insieme finito $A \subseteq V_\omega$, allora $A \in V_n$ per un opportuno n. Infatti, per ogni $a \in A$ sia $\rho(a) = \min\{k \mid a \in V_k\}$. Visto che A è finito, $m = \max\{\rho(a) \mid a \in A\}$ è finito, e quindi $A \subseteq V_m$ da cui $A \in \mathcal{P}(V_m) = V_{m+1}$. Notiamo inoltre che dall'ipotesi di $\mathrm{TC}(A)$ finito, segue che anche A è finito. Se per assurdo $A \notin V_\omega$, allora $A \not\subseteq V_\omega$, cioè esisterebbe un elemento $a_1 \in A$

[1] Ricordiamo che la *chiusura transitiva* $\mathrm{TC}(A)$ è il più piccolo insieme transitivo che contiene A, ed è uguale all'unione $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ dove $A_0 = A$ e $A_{n+1} = \bigcup A_n$.

[2] Per l'implicazione $\Leftarrow$ è necessario l'uso dell'assioma di Fondazione.

tale che $a_1 \notin V_\omega$. Adesso $t \in a_1 \in A \subseteq \mathrm{TC}(A) \Rightarrow t \in \mathrm{TC}(A)$, dunque $a_1 \subseteq \mathrm{TC}(A)$. Perciò anche a_1 è finito e da $a_1 \notin V_\omega$, analogamente a sopra, segue l'esistenza di almeno un elemento $a_2 \in a_1$ tale che $a_2 \notin V_\omega$. Iterando questa costruzione, si ottiene una catena discendente $A \ni a_1 \ni a_2 \ni \ldots$ che contraddice l'Assioma di fondazione.

Esercizio 4. Siano κ e ν cardinali infiniti. Dimostrare le proprietà seguenti.

1. Se $\mu^\nu < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$ e se $\nu < \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \kappa$.
2. Se $\mu^\nu < \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$ e se $\nu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$ allora κ è singolare ed inoltre $\kappa^\nu = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.

   [Suggerimento: usare la formula per i prodotti infiniti.]

Soluzione. (1). Nell'ipotesi che $\mathrm{cof}(\kappa) > \nu$, ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è limitata, e dunque $\mathrm{Fun}(\nu, \kappa) = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu, \alpha)$. Abbiamo quindi:

$$\kappa \;\leq\; \kappa^\nu \;=\; |\mathrm{Fun}(\nu,\kappa)| \;\leq\; \sum_{\alpha\in\kappa} |\mathrm{Fun}(\nu,\alpha)| \;=\; \sum_{\alpha\in\kappa} |\alpha|^\kappa \;=\; \max\left\{\sup_{\alpha\in\kappa} |\alpha|^\nu \,,\, \kappa\right\} \;=\; \kappa.$$

(2). Con le nostre ipotesi abbiamo che $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \nu < 2^\nu < \kappa$, dunque κ è singolare ed è quindi un cardinale limite. Possiamo scrivere allora $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$ dove $\langle \kappa_i \mid i \in \mathrm{cof}(\kappa)\rangle$ è una sequenza crescente di cardinali $\kappa_i < \kappa$. In particolare $\kappa = \sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$. Notando che $\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i \leq \prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i$ e applicando la formula del prodotto infinito, otteniamo:

$$\kappa^\nu = \left(\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i\right)^\nu \;\leq\; \left(\prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} \kappa_i\right)^\nu \;=\; \prod_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} {\kappa_i}^\nu \;=\; \left(\sup_{i\in\mathrm{cof}(\kappa)} {\kappa_i}^\nu\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)} \;\leq\; \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} \;\leq\; \kappa^\nu.$$