Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 17 Febbraio 2012

Cognome e nome: ....
E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X = \{A \subset \omega_7 \mid A \text{ è finito}\}$
2. $Y = \{A \subseteq \omega_7 \mid |A| = \aleph_7\}$.
3. $Z = \{A \subseteq \omega_7 \mid |A| = \aleph_4\}$.
4. $W_{ij} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega_7) \mid \forall\, F \in \mathcal{F}\ |F| = \aleph_i\ \&\ |\mathcal{F}| = \aleph_j\}$, al variare di $i = 1, \dots, 7$ e $j = 1, \dots, 8$.

Esercizio 2. Dimostrare che queste due proprietà sono equivalenti:

1. $\kappa^{\operatorname{cof}\kappa} = \kappa^+ \cdot 2^{\operatorname{cof}\kappa}$ per ogni cardinale infinito κ.
2. $\kappa^{\operatorname{cof}\kappa} = \kappa^+$ per ogni cardinale singolare κ con $\kappa > 2^{\operatorname{cof}\kappa}$.

Esercizio 3. Dimostrare che un ordinale λ si può scrivere nella forma $\lambda = \gamma \cdot \omega$ per un opportuno $\gamma \neq 0$ se e solo se $\lambda = \omega^{\beta+1}$ per un opportuno β.

Esercizio 4. Siano A e B due insiemi totalmente ordinati. Sull'insieme $A^B = \{f \mid f : B \to A\}$ consideriamo la relazione

$$f \prec g \quad \Longleftrightarrow \quad \text{esiste } \beta = \min\{b \in B \mid f(b) \neq g(b)\}\ \&\ f(\beta) < g(\beta).$$

Assumendo che A abbia almeno due elementi, dimostrare che:

1. $(A^B, \prec)$ è un ordine parziale.
2. $(A^B, \prec)$ è un buon ordine $\Longleftrightarrow$ A è bene ordinato e B è finito.