Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 20 gennaio 2012

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Dimostrare *in dettaglio* che le due seguenti proprietà per ordinali sono equivalenti:

1. $\alpha = \omega^\delta$ per un opportuno δ.
2. Per ogni $\beta \in \alpha$, il segmento finale $\{\eta \in \alpha \mid \eta \geq \beta\}$ ha lo stesso tipo d'ordine di α.

Esercizio 2. Sia α un ordinale, e sia δ l'esponente tale che $\omega^\delta \leq \alpha < \omega^{\delta+1}$. Dimostrare che per ogni funzione crescente $f : \alpha \to \alpha$, l'insieme di immagini $\{f(i) \mid i < \omega^\delta\}$ è un sottoinsieme illimitato di ω^δ.

Esercizio 3. Un cardinale κ si dice *esponenzialmente chiuso* se $\mu^\eta \leq \kappa$ per ogni $\mu, \eta < \kappa$. Dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

1. Un cardinale κ è esponenzialmente chiuso se e solo se $2^\nu \leq \kappa$ per ogni $\nu < \kappa$.
2. Per ogni cardinale μ e per ogni cardinale regolare η esiste $\kappa > \mu$ esponenzialmente chiuso con $\mathrm{cof}(\kappa) = \eta$.
3. Un cardinale esponenzialmente chiuso κ è regolare se e solo se $\sum_{\nu<\kappa} \kappa^\nu = \kappa$.

Esercizio 4. Ricordiamo la gerarchia di von Neumann

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta) \\ V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Dimostrare che se un ordinale α è il successore di un ordinale limite, allora vale la proprietà seguente: "$A \times B \in V_\alpha \Leftrightarrow A \in V_\alpha$ e $B \in V_\alpha$".