Elementi di Teoria degli Insiemi
Appello Straordinario - Prova scritta del 2.12.2011

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $Y_1 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{N}\}$;
2. $Y_2 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione finita di $\mathbb{N}\}$;
3. $Y_3 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione infinita di $\mathbb{N}$ dove ogni $F \in \mathcal{F}$ è infinito$\}$.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che per ogni coppia di ordinali $\beta \leq \alpha$ esiste ed un unico ordinale γ tale $\beta + \gamma = \alpha$. Un tale ordinale γ si denota $\alpha - \beta$.
2. Trovare tutti gli ordinali α per i quali esiste β tale che $\alpha - \beta = \beta$.
3. Trovare tutti gli ordinali α per i quali esiste $\beta \neq 0$ tale che $\alpha - \beta = \alpha$.

Esercizio 3. Dimostrare in dettaglio la seguente proprietà: "Siano $\nu \leq \kappa$ cardinali infiniti. Allora $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \nu$ se e solo se esiste una ν-sequenza di cardinali $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \nu \rangle$ dove $\kappa_\alpha < \kappa$ per ogni $\alpha < \nu$ e $\kappa = \sum_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha$".[2]

Esercizio 4.

1. Dimostrare che se $f : \omega_1 \to \alpha$ è strettamente crescente, allora $\mathrm{Im}(f) \subseteq \omega_1 \cdot \beta$, dove β è il quoziente della divisione euclidea di α con ω_1.
2. Dimostrare che se $f : \omega_1 \to \alpha$ è strettamente crescente, e se $\mathrm{cof}(\alpha) = \aleph_0$, allora f è limitata.
3. È vero che ogni $f : \omega_1 \to \alpha$ strettamente crescente e continua ammette punti fissi?[3]

[1] Una *partizione* di X è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi non vuoti a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = X$.
[2] Per definizione, $\mathrm{cof}(\kappa) = \min\{\alpha$ ordinale $\mid \exists f : \alpha \to \kappa$ crescente e illimitata$\}$ o, equivalentemente, $\mathrm{cof}(\kappa) = \min\{\alpha$ ordinale $\mid \exists f : \alpha \to \kappa$ illimitata$\}$.
[3] Una funzione $f : \beta \to \alpha$ tra ordinali si dice *continua* se per ogni ordinale limite $\lambda < \beta$ si ha che $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$.