Elementi di Logica Matematica
Terzo Appello - Prova scritta del 17 Settembre 2009
Soluzioni

Esercizio 1. Sia $\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$, dove si pone induttivamente $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$.

1. Dimostrare che $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.
2. Dimostrare che ε_0 è il più piccolo ordinale α tale che $\omega^\alpha = \alpha$.

Soluzione. (1). Notiamo anzitutto che la sequenza $\langle \alpha_n \mid n \in \omega\rangle$ è crescente. Infatti $\alpha_0 = \omega < \omega^\omega = \alpha_1$ e, induttivamente, da $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ segue che $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} < \omega^{\alpha_{n+1}} = \alpha_{n+2}$, visto che la funzione esponenziale è crescente. Di conseguenza, ε_0 è un ordinale limite e $\varepsilon_0 = \sup_{\gamma<\varepsilon_0} \gamma = \sup_{n<\omega} \alpha_n$. Applicando la definizione di funzione esponenziale, si ottengono le uguaglianze

$$\omega^{\varepsilon_0} = \sup_{\gamma<\varepsilon_0} \omega^\gamma = \sup_{n<\omega} \omega^{\alpha_n} = \sup_{n<\omega} \alpha_{n+1} = \varepsilon_0.$$

(2). Mostriamo che nessun $\beta < \varepsilon_0$ è tale che $\omega^\beta = \beta$. Intanto $\omega^0 = 1 > 0$. Se $\beta \neq 0$ è finito, $\omega^\beta \geq \omega^1 > \beta$. Se infine $\omega \leq \beta < \varepsilon_0$, esiste un naturale k tale che $\alpha_k \leq \beta < \alpha_{k+1}$. Ma allora $\beta < \alpha_{k+1} = \omega^{\alpha_k} \leq \omega^\beta$, e anche in questo caso $\beta \neq \omega^\beta$.

Esercizio 2. Determinare la cardinalità dei seguenti ordinali, dove l'esponenziazione deve intendersi tra ordinali:

$$(a)\ \omega^\omega\,;\quad (b)\ \omega^{\omega_1}\,;\quad (c)\ {\omega_1}^\omega\,;\quad (d)\ {\omega_1}^{\omega_1}\,;\quad (e)\ \omega^{\omega_2}\,;\quad (f)\ {\omega_1}^{\omega_2}\,;\quad (g)\ {\omega_2}^\omega\,;\quad (h)\ {\omega_2}^{\omega_1}\,;\quad (i)\ {\omega_2}^{\omega_2}$$

Soluzione. Ricordiamo anzitutto che, per definizione, il prodotto ordinale $\gamma \cdot \delta$ è isomorfo al prodotto cartesiano $\gamma \times \delta$ con l'ordinamento *anti-lessicografico*: $(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow y < y'$ oppure $y = y'$ e $x < x'$. Dunque la cardinalità di un prodotto tra ordinali $|\gamma \cdot \delta| = |\gamma \times \delta|$, e quindi $|\gamma \cdot \delta| = \max\{|\gamma|, |\delta|\}$ quando $\gamma, \delta \geq \omega$ sono infiniti. Dimostriamo ora una proprietà generale:

($*$) Siano $\alpha, \beta \geq \omega$ ordinali infiniti. Allora $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$

Una disuguaglianza è banale, perchè α e β sono entrambi minori o uguali a α^β. Per l'altra disuguaglianza, procediamo per induzione transfinita su β. Dalla proprietà di sopra, segue subito per induzione che $|\alpha^n| = |\alpha|$ per ogni $n < \omega$. Nel caso base $\beta = \omega$, abbiamo allora che $|\alpha^\omega| = |\alpha| = \max\{|\alpha|, |\omega|\}$. Infatti:

$$|\alpha^\omega| = |\bigcup_{n<\omega} \alpha^n| \leq \sum_{n<\omega} |\alpha^n| = \max\{\sup_{n<\omega} |\alpha^n|, |\omega|\} = \max\{|\alpha|, |\omega|\} = |\alpha|.$$

Per il caso successore $\beta = \gamma+1$, basta notare che $|\alpha^{\gamma+1}| = |\alpha^\gamma \cdot \alpha| = \max\{|\alpha^\gamma|, |\alpha|\} = \max\{\max\{|\alpha|, |\gamma|\}, |\alpha|\} = \max\{|\alpha|, |\gamma + 1|\}$. Infine, il caso limite $\beta = \lambda$ si dimostra notando che

$$|\alpha^\lambda| = |\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma| \leq \sum_{\gamma<\lambda} |\alpha^\gamma| = \max\{\sup_{\gamma<\lambda}(\max\{|\alpha|, |\gamma|\}), |\lambda|\} = \max\{|\alpha|, |\lambda|\}.$$

Usando la proprietà ($*$), si calcolano facilmente tutte le cardinalità richieste. Precisamente: $(a)\, |\omega^\omega| = \aleph_0$; $(b)\, |\omega^{\omega_1}| = \aleph_1$; $(c)\, |{\omega_1}^\omega| = \aleph_1$; $(d)\, |{\omega_1}^{\omega_1}| = \aleph_1$; $(e)\, |\omega^{\omega_2}| = \aleph_2$; $(f)\, |{\omega_1}^{\omega_2}| = \aleph_2$; $(g)\, |{\omega_2}^\omega| = \aleph_2$; $(h)\, |{\omega_2}^{\omega_1}| = \aleph_2$; $(i)\, |{\omega_2}^{\omega_2}| = \aleph_2$.

Esercizio 3. Assumiamo che valga l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni α. Determinare le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X = \{A \subseteq \omega_{17} \mid |A| = \aleph_{17}\}$
2. $Y_i = \{A \subseteq \omega_{17} \mid |A| = \aleph_i\}$ al variare di $i = 0, \ldots, 16$.

3. $Z = \{f : \omega_{17} \to \omega_{13} \mid f \text{ è illimitata}\}$.

4. $W = \{f : \omega_{17} \to \omega_{17} \mid f$ è strettamente crescente e continua[1]$\}$.

Soluzione. Dimostriamo prima una proprietà generale:

($\star$) Siano $\kappa \geq \nu$ cardinali infiniti, e denotiamo con $[\kappa]^\nu = \{A \subseteq \kappa : |A| = \nu\}$ l'insieme di tutte le parti di κ aventi cardinalità ν. Allora $|[\kappa]^\nu| = \kappa^\nu$.

Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \kappa$ di cardinalità ν, fissiamo una bigezione $f_A : \nu \to A$. La corrispondenza $A \mapsto f_A$ determina una funzione iniettiva dall'insieme $[\kappa]^\nu$ nell'insieme $\mathrm{Fun}(\nu, \kappa) = \{f \mid f : \nu \to \kappa\}$. Abbiamo così la disuguaglianza $|[\kappa]^\nu| \leq \kappa^\nu$. Per l'altra disuguaglianza, notiamo che la cardinalità del prodotto cartesiano $|\nu \times \kappa| = \max\{\nu, \kappa\} = \kappa$. Ne segue che $|[\kappa]^\nu| = |[\nu \times \kappa]^\nu|$. Adesso, ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è in realtà un sottoinsieme di $\nu \times \kappa$ (ricordiamo che, per definizione, $f = \{(x, f(x)) \mid x \in \nu\}$). Inoltre $|f| = \nu$, visto che $x \mapsto (x, f(x))$ è una bigezione tra ν ed f. Ma allora $\mathrm{Fun}(\nu, \kappa) \subseteq [\nu \times \kappa]^\nu$, e quindi $\kappa^\nu \leq |[\nu \times \kappa]^\nu| = |[\kappa]^\nu|$.

(1). Per quanto visto sopra, $|X| = |[\aleph_{17}]^{\aleph_{17}}| = {\aleph_{17}}^{\aleph_{17}} = 2^{\aleph_{17}}$, che è uguale a $\aleph_{18}$ per l'ipotesi generalizzata del continuo.

(2). $|Y_i| = |[\aleph_{17}]^{\aleph_i}| = {\aleph_{17}}^{\aleph_i} =$ (con ripetute applicazioni dell'uguaglianza di Hausdorff [2]) $= \aleph_{17} \cdot \aleph_0^{\aleph_i} = \aleph_{17} \cdot 2^{\aleph_i} = \aleph_{17} \cdot \aleph_{i+1} = \aleph_{17}$, visto che $i \leq 16$.

(3). Intanto $Z \subset \mathrm{Fun}(\omega_{17}, \omega_{13})$, e quindi $|Z| \leq {\aleph_{13}}^{\aleph_{17}} = 2^{\aleph_{17}} = \aleph_{18}$. Viceversa, fissiamo una funzione $\sigma : \omega_{17} \to \omega_{13}$ illimitata (ad esempio, $\sigma(\alpha) = \alpha$ per $\alpha \in \omega_{13}$, e $\sigma(\alpha) = 0$ per $\alpha \in \omega_{17} \setminus \omega_{13}$). Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \omega_{17}$, consideriamo la funzione $f_A : \omega_{17} \to \omega_{13}$ dove $f_A(\alpha) = \sigma(\alpha)$ se $\alpha \in A$, e $f_A(\alpha) = \sigma(\alpha)+1$ se $\alpha \notin A$. Visto che σ è illimitata, anche f_A lo è. È immediato verificare che se $A \neq B$ allora $f_A \neq f_B$. Dunque la corrispondenza $A \mapsto f_A$ determina una funzione iniettiva dall'insieme delle parti $\mathcal{P}(\omega_{17})$ nell'insieme Z, e perciò $\aleph_{18} = 2^{\aleph_{17}} = |\mathcal{P}(\omega_{17})| \leq |Z|$.

(4). Analogamente a sopra, $W \subset \mathrm{Fun}(\omega_{17}, \omega_{17})$, e quindi $|Z| \leq {\aleph_{17}}^{\aleph_{17}} = 2^{\aleph_{17}} = \aleph_{18}$. Viceversa, per ogni sottoinsieme $A \subseteq \omega_{17}$, consideriamo la funzione $g_A : \omega_{17} \to \omega_{13}$ definita come segue:

$$g_A(0) = 0\,; \quad g_A(\alpha+1) = \begin{cases} g_A(\alpha) + 1 & \text{se } \alpha \in A \\ g_A(\alpha) + 2 & \text{se } \alpha \notin A \end{cases} ; \quad g_A(\lambda) = \sup_{\beta<\lambda} g_A(\beta) \text{ se } \lambda \text{ limite.}$$

Segue direttamente dalla definizione che g_A è (strettamente) crescente e continua. Se $A \neq B$, sia γ il minimo punto che "testimonia" la differenza dei due insiemi, cioè $\gamma = \min[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$. È immediato verificare per induzione transfinita che $g_A(\delta) = g_B(\delta)$ per ogni $\delta \leq \gamma$, ma $g_A(\gamma+1) \neq g_B(\gamma+1)$. Ne segue che la corrispondenza $A \mapsto g_A$ determina una funzione iniettiva dall'insieme delle parti $\mathcal{P}(\omega_{17})$ nell'insieme W, e perciò $\aleph_{18} = 2^{\aleph_{17}} = |\mathcal{P}(\omega_{17})| \leq |W|$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione-classe "*beth*":

$$\beth_0 = \aleph_0\,, \quad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}\,, \quad \beth_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.}$$

1. Dimostrare che la funzione *beth* ammette punti fissi arbitrariamente grandi, cioè che per ogni cardinale ν, esiste un cardinale $\kappa > \nu$ tale che $\beth_\kappa = \kappa$.

2. Dimostrare che per ogni ordinale $\alpha \geq \omega^2$ si ha che l'α-esimo insieme della gerarchia di von Neumann[3] ha cardinalità $|V_\alpha| = \beth_\alpha$.

3. Dimostrare che $|V_\alpha| = |\mathcal{P}(\alpha)|$ se e solo se vale uno dei seguenti tre casi:
   (a) $\alpha = 4$; (b) $\alpha = \omega + 1$; (c) $\alpha = \kappa + 1$ dove κ è un punto fisso della funzione *beth*.

[1] Ricordiamo che una funzione f definita su un ordinale α si dice *continua* se per ogni ordinale limite $\lambda < \alpha$ si ha che $\sup_{\gamma<\lambda} f(\gamma) = f(\lambda)$.

[2] Ricordiamo l'*uguaglianza di Hausdorff*: ${\aleph_{\alpha+1}}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$.

[3] Ricordare che la *gerarchia di von Neumann* è definita per ricorsione transfinita ponendo: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\lambda$ se λ è limite.

Soluzione. (1). Definiamo induttivamente $\kappa_0 = \nu$, $\kappa_{n+1} = \beth_{\kappa_n}$. Allora $\kappa = \sup_n \kappa_n$ è il cardinale cercato. Infatti, la successione $\langle \kappa_n \mid n \in \omega \rangle$ è crescente, dunque $\kappa > \kappa_0 = \nu$, e inoltre applicando le definizioni:

$$\beth_\kappa = \sup_{\gamma<\kappa} \beth_\gamma = \sup_{n<\omega} \beth_{\kappa_n} = \sup_{n<\omega} \kappa_{n+1} = \kappa.$$

(2). Dimostriamo per induzione transfinita che per ogni ordinale β si ha $|V_{\omega+\beta}| = \beth_\beta$. Notiamo che $|V_0| = 0$, $|V_1| = 1$, $|V_2| = 2$, $|V_3| = 2^2$, $|V_4| = |\mathcal{P}(V_3)| = 2^4 = 16$. Inoltre è immediato verificare per induzione che per ogni $n > 4$, si ha $|V_n| > 2^n$. Visto che gli insiemi V_n con $n \in \omega$ sono insiemi finiti arbitrariamente grandi, segue che $V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n$ ha cardinalità numerabile $\aleph_0 = \beth_0$. Questo dimostra la base di induzione $|V_{\omega+0}| = \beth_0$. Per il passo successore, abbiamo che $|V_{\omega+\gamma+1}| = |\mathcal{P}(V_{\omega+\gamma})| = 2^{|V_{\omega+\gamma}|} =$ (per ip. ind.) $2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1}$. Infine, il caso limite λ segue direttamente dalle definizioni e dall'ipotesi induttiva:

$$|V_{\omega+\lambda}| = |\bigcup_{\gamma<\lambda} V_{\omega+\gamma}| = |\bigcup_{\gamma<\lambda} (V_{\omega+\gamma+1} \setminus V_{\omega+\gamma})| = \sum_{\gamma<\lambda} |V_{\omega+\gamma+1} \setminus V_{\omega+\gamma}| = \sum_{\gamma<\lambda} \beth_{\gamma+1} = \sum_{\delta<\lambda} \beth_\delta = \beth_\lambda.$$

(Abbiamo considerato le differenze insiemistiche $V_{\omega+\gamma+1} \setminus V_{\omega+\gamma}$ per ottenere una unione disgiunta. Inoltre, da $|V_{\omega+\gamma+1}| = \beth_{\gamma+1} > \beth_\gamma = |V_{\omega+\gamma}|$, segue che $|V_{\omega+\gamma+1} \setminus V_{\omega+\gamma}| = \beth_{\gamma+1}$.) La tesi si ottiene notando che se $\alpha \geq \omega^2$, allora $\omega + \alpha = \alpha$.

(3). $|V_0| = 0 \neq 1 = |\mathcal{P}(0)|$, $|V_1| = 1 \neq 2 = |\mathcal{P}(1)|$, $|V_2| = 2 \neq 2^2 = |\mathcal{P}(2)|$, $|V_3| = 2^2 \neq 2^3 = |\mathcal{P}(3)|$, mentre $|V_4| = 2^4 = |\mathcal{P}(4)|$. Inoltre, per quanto già visto sopra, $|V_n| > 2^n = |\mathcal{P}(n)|$ per $n > 4$. Dunque $\alpha = 4$ è l'unico ordinale finito tale che $|V_\alpha| = |\mathcal{P}(\alpha)|$.

Adesso, $|V_\omega| = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\omega)|$, mentre $|V_{\omega+1}| = |\mathcal{P}(V_\omega)| = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\omega+1)|$. Per ogni β numerabile, si ha $|\mathcal{P}(\omega+\beta)| = 2^{\aleph_0}$, mentre se $\beta > 1$, si ha $|V_{\omega+\beta}| = \beth_\beta > \beth_1 = 2^{\aleph_0}$. Dunque $\alpha = \omega + 1$ è l'unico ordinale infinito numerabile tale che $|V_\alpha| = |\mathcal{P}(\alpha)|$.

Nel caso generale, in cui possiamo supporre $\alpha \geq \omega^2$, si ha che $|V_\alpha| = |\mathcal{P}(\alpha)|$ se e solo se $\beth_\alpha = 2^{|\alpha|}$. Supponiamo per assurdo che α sia un ordinale limite. Allora per ogni $\gamma < \alpha$ si avrebbe $\beth_\gamma < \alpha$, altrimenti da $\alpha \leq \beth_\gamma$ seguirebbe $2^{|\alpha|} \leq 2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1} < \beth_\alpha$. Ma allora $\beth_\alpha = \sup_{\gamma<\alpha} \beth_\gamma \leq \alpha < 2^{|\alpha|}$, contro l'ipotesi. Dunque basta considerare il caso in cui $\alpha = \kappa + 1$ è successore. Se $\kappa = \beth_\kappa$ è un punto fisso della funzione *beth*, allora $\beth_\alpha = 2^{\beth_\kappa} = 2^\kappa = 2^{|\alpha|}$, come voluto. Viceversa, se κ non è punto fisso della funzione *beth*, cioè se $\kappa < \beth_\kappa$, allora $\kappa \leq \beth_\gamma$ per qualche $\gamma < \kappa$, e quindi $2^{|\alpha|} = 2^{|\kappa|} \leq 2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1} \leq \beth_\kappa < \beth_\alpha$.

Esercizio 5.

1. Dimostrare in dettaglio che gli ordinali ξ tali che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$ sono tutti e soli i multipli di ω^{ω^2}, cioè quelli della forma $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta$ per qualche ζ.

2. Più in generale, per ogni α, individuare tutti e soli gli ordinali ξ tali che $\omega^\alpha \cdot \xi = \xi$.

Soluzione. (1). Dimostriamo prima che 0 è l'unico ordinale $\xi < \omega^{\omega^2}$ tale che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$. Notiamo che $\omega^{\omega^2} = \sup_{n<\omega} \omega^{\omega \cdot n}$, dove la successione $\langle \omega^{\omega \cdot n} \mid n \in \omega \rangle$ è crescente. Dunque se $0 < \xi < \omega^{\omega^2}$, esiste un naturale n tale che $\omega^{\omega \cdot n} \leq \xi < \omega^{\omega \cdot (n+1)}$. Ma allora $\omega^\omega \cdot \xi \geq \omega^\omega \cdot \omega^{\omega \cdot n} = \omega^{\omega + \omega \cdot n} = \omega^{\omega \cdot (n+1)}$, e quindi $\omega^\omega \cdot \xi > \xi$.

Passiamo ora al caso generale. Grazie alla divisione euclidea possiamo scrivere un generico ordinale ξ nella forma $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta + \rho$ dove il resto $\rho < \omega^{\omega^2}$. Abbiamo allora che

$$\omega^\omega \cdot \xi = \omega^\omega \cdot (\omega^{\omega^2} \cdot \zeta + \rho) = \omega^\omega \cdot \omega^{\omega^2} \cdot \zeta + \omega^\omega \cdot \rho = \omega^{\omega+\omega^2} \cdot \zeta + \omega^\omega \cdot \rho = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta + \omega^\omega \cdot \rho.$$

Dunque $\xi = \omega^\omega \cdot \xi$ se e solo se $\omega^{\omega^2} \cdot \zeta + \rho = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta + \omega^\omega \cdot \rho$, e quest'ultima uguaglianza vale se e solo se $\rho = \omega^\omega \cdot \rho$. (Ricordiamo che in generale vale la seguente legge di cancellazione: $\vartheta + \delta = \vartheta + \delta' \Rightarrow \delta = \delta'$.) Ma $\rho < \omega^{\omega^2}$ e allora, per quanto già dimostrato sopra, $\rho = \omega^\omega \cdot \rho$ solo se $\rho = 0$. Concludiamo che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$ se e solo se $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta$ per qualche ζ, come volevamo.

(2). In modo del tutto analogo al punto (1), dimostriamo anzitutto che 0 è l'unico ordinale $\xi < \omega^{\alpha \cdot \omega}$ tale che $\omega^\alpha \cdot \xi = \xi$. Notiamo che $\omega^{\alpha \cdot \omega} = \sup_{n<\omega} \omega^{\alpha \cdot n}$, dove la successione $\langle \omega^{\alpha \cdot n} \mid n \in \omega \rangle$ è crescente. Dunque se $0 < \xi < \omega^{\alpha \cdot \omega}$, esiste un naturale n tale che $\omega^{\alpha \cdot n} \leq \xi < \omega^{\alpha \cdot (n+1)}$. Ma allora $\omega^\alpha \cdot \xi \geq \omega^\alpha \cdot \omega^{\alpha \cdot n} = \omega^{\alpha + \alpha \cdot n} = \omega^{\alpha \cdot (n+1)}$, e quindi $\omega^\alpha \cdot \xi > \xi$.

Anche per il caso generale si procede esattamente come al punto (1). Precisamente, grazie alla divisione euclidea, scriviamo ξ nella forma $\xi = \omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \rho$ dove il resto $\rho < \omega^{\alpha \cdot \omega}$. Abbiamo che

$$\omega^\alpha \cdot \xi = \omega^\alpha \cdot (\omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \rho) = \omega^\alpha \cdot \omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \omega^\alpha \cdot \rho = \omega^{\alpha + \alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \omega^\alpha \cdot \rho = \omega^{\alpha(1+\omega)} \cdot \zeta + \omega^\alpha \cdot \rho = \omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \omega^\alpha \cdot \rho.$$

Allora $\xi = \omega^\alpha \cdot \xi$ se e solo se $\omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \rho = \omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta + \omega^\alpha \cdot \rho$, e quest'ultima uguaglianza vale se e solo se $\rho = \omega^\alpha \cdot \rho$. Visto che $\rho < \omega^{\alpha \cdot \omega}$, per quanto già dimostrato $\rho = \omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \rho$ solo se $\rho = 0$. Concludiamo che $\omega^\alpha \cdot \xi = \xi$ se e solo se $\xi = \omega^{\alpha \cdot \omega} \cdot \zeta$ per qualche ζ.