Elementi di Logica Matematica
Primo Appello - Prova scritta del 11 Giugno 2009

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

(1) $Z_1 = [\omega_1]^{<\aleph_0} = \{A \subset \omega_1 \mid A \text{ è finito}\}$; (2) $Z_2 = [\omega_1]^{\aleph_0} = \{A \subseteq \omega_1 \mid |A| = \aleph_0\}$
(3) $Z_3 = [\omega_1]^{\aleph_1} = \{A \subseteq \omega_1 \mid |A| = \aleph_1\}$; (4) $Z_4 = \{f : \omega \to \omega_1 \mid f \text{ è strettamente crescente}\}$.
(5) $Z_5 = \{f : A \to \omega_1 \mid A \subset \omega_1 \text{ e } |A| = \aleph_0\}$.

Esercizio 2.

1. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 4 + 1$ e $\omega \cdot 3 + 6$.
2. Trovare esempi di ordinali α tali che $n^\alpha = \alpha$ per ogni naturale $n > 1$.
3. Trovare esempi di ordinali α tali che ${\omega_1}^\alpha = \alpha$.

Esercizio 3. Consideriamo la *gerarchia di von Neumann*: $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ è limite. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $B \subseteq A \in V_\alpha \Rightarrow B \in V_\alpha$.
2. $a \in A \in V_\alpha \Rightarrow a \in V_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$.
3. $\mathcal{F} \in V_\alpha \Rightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in V_\alpha$. Vale l'implicazione inversa?
4. $A \in V_\alpha \Leftrightarrow \mathrm{TC}(A) \in V_\alpha$.[1]
5. $A \in V_\omega \Rightarrow |\mathrm{TC}(A)| < \aleph_0$. Inoltre, se A ben fondato, vale anche $|\mathrm{TC}(A)| < \aleph_0 \Rightarrow A \in V_\omega$.
6. Per quali ordinali finiti $n < \omega$ si ha $|V_n| \leq |\mathcal{P}(n)|$?
7. * Per ogni α, esiste ed unica funzione *rango* $\rho_\alpha : V_\alpha \to \alpha$ tale che

$$\rho_\alpha(\emptyset) = 0\,; \quad \rho_\alpha(A) = \sup\{\rho_\alpha(a) + 1 \mid a \in A\} \quad \text{se } A \neq \emptyset.$$

Esercizio 4. Dimostrare in dettaglio che un insieme totalmente ordinato $(A, <)$ ha tutti i suoi segmenti iniziali propri finiti se e solo se è isomorfo ad un ordinale $\alpha \leq \omega$.

[1] Ricordare che la *chiusura transitiva* $\mathrm{TC}(A)$ è il più piccolo insieme transitivo che contiene A, ed è uguale all'unione $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ dove $A_0 = A$ e $A_{n+1} = \bigcup_{a \in A_n} a$.