Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 16 Aprile 2009

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Supponiamo che per ogni $n \in \omega$, si abbia $2^{\aleph_{\omega+n}} = 2^{\aleph_\omega}$. Dimostrare che allora anche $2^{\aleph_{\omega+\omega}} = 2^{\aleph_\omega}$.

Esercizio 2.

1. Trovare tutti gli ordinali α tali che $\omega \cdot \alpha = \omega^2 \cdot \alpha$.
2. Trovare tutti gli ordinali β tali che $\beta + \omega = \omega \cdot \beta$.

Esercizio 3. Assumiamo che la cardinalità del continuo $\mathfrak{c} = \aleph_{14}$. Mettere in ordine crescente (usando disuguaglianze deboli $\leq$ e disuguaglianza forti $<$ a seconda dei casi) i seguenti cardinali:

$$(a)\ {\aleph_{15}}^{\aleph_0}\ ; \quad (b)\ {\aleph_{13}}^{\aleph_{13}}\ ; \quad (c)\ {\aleph_0}^{\aleph_{13}}\ ; \quad (d)\ \mathfrak{c}\ ; \quad (e)\ {\aleph_{13}}^{\aleph_0}$$

Esercizio 4. All'interno del sistema assiomatico di Zermelo-Fraenkel ZF, dimostrare che le seguenti forme dell'*assioma di scelta* sono equivalenti:

1. Per ogni sequenza non vuota $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ di insiemi non vuoti, il prodotto infinito $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.
2. Per ogni insieme A esiste una funzione di scelta $f : \mathcal{P}(A) \to A$ tale che $f(X) \in X$ per ogni sottoinsieme non vuoto $X \subseteq A$.
3. Per ogni sequenza $\langle F_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J \rangle$ di insiemi, vale l'uguaglianza:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} F_{i,f(i)}.$$

[Ricordiamo che con J^I si indica l'insieme di tutte le funzioni $f : I \to J$.]