Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 27 Gennaio 2009 - V Appello

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia κ un cardinale singolare e supponiamo che la successione $\langle 2^\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ abbia massimo 2^ξ. Dimostrare che allora anche $2^\kappa = 2^\xi$.

Esercizio 2. Siano:

- V_0 uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $\aleph_0$;
- V_1 uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $\aleph_1$;
- V_2 uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $\aleph_2$.

Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. V_i, al variare di $i = 0, 1, 2$;
2. Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(V_i, V_j)$ di tutte le applicazioni lineari $T : V_i \to V_j$, al variare di $i, j = 0, 1, 2$.

[Ricordare che $\mathcal{B}$ è una base di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ se ogni vettore di V si scrive in modo *unico* come combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$ di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$.]

Esercizio 3. Ricordiamo la *gerarchia di von Neumann*:

$$\begin{cases} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ limite.} \end{cases}$$

Sia adesso f una funzione.

- Dimostrare che se $f \in V_\alpha$, allora sia il *dominio* $\mathrm{dom}(f)$, che l'*immagine* $\mathrm{imm}(f)$ appartengono a V_α.
- Sotto quali ipotesi sull'ordinale α vale l'implicazione inversa?

$$\mathrm{dom}(f), \mathrm{imm}(f) \in V_\alpha \;\Rightarrow\; f \in V_\alpha.$$

Esercizio 4. Trovare tutti gli ordinali δ tali che $\omega^2 \cdot \delta = \delta \cdot \omega^2$.