Elementi di Logica Matematica
Prova scritta di 19 Settembre 2008

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Calcolare $(\omega + 1)^4$;
2. Calcolare $(\omega + 1)^{\omega+1}$;
3. Dimostrare che $\alpha = 1$ è l'unico ordinale $\alpha < \omega^\omega$ tale che $\alpha + \omega = \omega \cdot \alpha$.
4. *Facoltativo*: Trovare tutti gli ordinali α tali che $\alpha + \omega = \omega \cdot \alpha$. (*Sugg.* Usare la proprietà (3)).
   Più in generale, per ogni fissato γ, trovare tutti gli ordinali α tali che $\alpha + \omega^\gamma = \omega^\gamma \cdot \alpha$.

Esercizio 2. Procedendo per induzione transfinita, dimostrare che per ogni ordinale $\alpha < \omega_1$ esiste un sottoinsieme $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ isomorfo ad α (con l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$).

Esercizio 3. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{f : \kappa \to \kappa \mid f \text{ è finito a uno}\}$, dove κ è un cardinale infinito.
   [Una funzione $f : A \to B$ si dice *finito a uno* se per ogni $b \in B$, l'insieme $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ delle sue controimmagini è finito (o vuoto).]
2. $X_2 = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \sigma \text{ è una permutazione cofinitaria}\}$.
   [Una funzione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *permutazione* se è una bigezione; si dice *cofinitaria* se l'insieme dei suoi punti fissi $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = n\}$ è finito (o vuoto).]
3. $X_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è una bigezione}\}$.

Esercizio 4. Sia $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ una famiglia non vuota di cardinali > 1. Dimostrare che per ogni cardinale ν:

$$\left(\sum_{i\in I} \kappa_i\right)^\nu \leq \prod_{i\in I} \kappa_i^{\,\nu}.$$

Esercizio 5. Chiamiamo *approssimazione normale* dell'insieme Y una successione $\langle X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ tale che:

- $|X_\alpha| < \aleph_1$ per ogni α;
- $X_\alpha \subset X_\beta$ per ogni $\alpha < \beta < \omega_1$ (le inclusioni $X_\alpha \subset X_\beta$ sono strette);
- $X_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ per ogni ordinale limite $\lambda < \omega_1$;
- $Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$.

1. Dimostrare che se $\langle X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ è una approssimazione normale di Y, allora $|Y| = \aleph_1$.
2. Dimostrare che se $\langle X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ e $\langle X'_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ sono due approssimazioni normali dello stesso insieme Y, allora l'insieme di indici $\{\alpha < \omega_1 \mid X_\alpha = X'_\alpha\}$ è illimitato in ω_1.
3. Le proprietà (1) e (2) valgono se al posto di ω_1 si considera un qualunque cardinale $\kappa > \omega_1$?