Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 24 Giugno 2008

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. L'insieme quoziente $\mathbb{R}/\equiv$ dove $\equiv$ é l'equivalenza di Vitali: $r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Q}$;
2. $Z_1 = \{f : \omega_1 \to \omega_1 \mid f \text{ limitata}\}$;
3. $Z_2 = \{g : \omega_1 \to \omega_1 \mid g \text{ illimitata}\}$;
4. $Z_3 = \{A \subset \kappa^+ \mid |A| = \kappa\}$ dove κ è un cardinale infinito.[1]

Esercizio 2.

1. Trovare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^4 + \omega^2 \cdot 5 + \omega \cdot 3 + 12$ e $\omega^2 + 7$.
2. Definire esplicitamente due sottoinsiemi di numeri reali che siano rispettivamente isomorfi agli ordinali ω^2 e ω^ω. (Naturalmente, si intende che l'ordinamento su tali sottoinsiemi sia quello indotto da $\mathbb{R}$.)

Esercizio 3. Sia κ un cardinale infinito. Dimostrare che $2^\kappa = (\sup_{\nu<\kappa} 2^\nu)^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.

Esercizio 4. Un insieme $C \subseteq \omega_1$ si dice *chiuso* se ogni suo sottoinsieme $A \subseteq C$ non vuoto e *limitato* ha estremo superiore $\sup A = \bigcup A \in C$.

- Dimostrare che se C_1 e C_2 sono chiusi e illimitati, allora anche la loro intersezione $C_1 \cap C_2$ è chiusa e illimitata.
- Vale la proprietà di sopra prendendo ω al posto di ω_1?

Esercizio 5. Ricordiamo che per ogni $\alpha \neq 0$, si definiva per induzione transfinita l'*esponenziale*:

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta \text{ se } \lambda \text{ limite.} \end{cases}$$

Dimostrare che per tutti gli $\alpha, \beta \neq 0$, l'ordinale α^β è isomorfo all'insieme $(\exp(\alpha, \beta), \prec)$ dove:

- $\exp(\alpha, \beta) = \{f : \beta \to \alpha \mid \{i \in \beta \mid f(i) \neq 0\} \text{ è finito}\}$ è l'insieme delle funzioni $f : \beta \to \alpha$ a supporto finito;
- $f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(\gamma) < g(\gamma)$ dove $\gamma = \max\{i \in \beta \mid f(i) \neq g(i)\}$ è il punto massimo dove f e g differiscono.

[1] Se $\kappa = \aleph_\alpha$, con $\kappa^+ = \aleph_{\alpha+1}$ si denota il suo cardinale successore.