Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 3 Giugno 2008

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ è bene ordinato}\}$;
2. $X_2 = \{\alpha \text{ ordinale} \mid \alpha \text{ è il tipo d'ordine di un sottoinsieme } A \subseteq \mathbb{R}\}$;
3. $X_3 = \{A \subseteq \omega_1 \mid |A| = \aleph_0\}$;

Esercizio 2. Consideriamo la *gerarchia di von Neumann*:

$$\begin{cases} V_0 & = \emptyset \\ V_{\alpha+1} & = \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda & = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ limite.} \end{cases}$$

1. Per ogni ordinale α, dimostrare le seguenti proprietà:
   (I) V_α è *transitivo*, cioè $x \in y \in V_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha$;
   (II) $\alpha \in V_{\alpha+1}$ ma $\alpha \notin V_\alpha$.
2. Stabilire per quali ordinali α vale ciascuna delle seguenti proprietà:
   (a) Se $A, B \in V_\alpha$ allora $\{A, B\} \in V_\alpha$;
   (b) Se $\mathcal{F} \in V_\alpha$ allora $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \in V_\alpha$;
   (c) Per ogni funzione f, se $\mathrm{dom}(f) \in V_\alpha$ è numerabile e $\mathrm{imm}(f) \subseteq V_\alpha$, allora $f \in V_\alpha$;
3. Dimostrare che esistono cardinali $\kappa > \omega$ tali che $\kappa = |V_\kappa|$;
4. Dimostrare che se $\kappa = |V_\kappa|$, allora per ogni $\nu, \mu < \kappa$ si ha $\nu^\mu < \kappa$.

Esercizio 3.

1. Trovare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^3 + \omega \cdot 7 + 5$ e $\omega + 2$.
2. Trovare tutti gli ordinali γ tali che $\omega^2 \cdot 3 + \gamma = \gamma + \omega^2 \cdot 3$.

Esercizio 4. Supponiamo che $2^{\aleph_n} = \mathfrak{c}$ per ogni $n < \omega$, dove $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ denota la cardinalità del continuo.[1] Dimostrare che allora anche $2^{\aleph_\omega} = \mathfrak{c}$.

Esercizio 5. Sia λ un cardinale limite. Dimostrare che se il cardinale $\kappa < \mathrm{cof}(\lambda)$, allora $\lambda^\kappa = \sup_{\nu<\lambda} \nu^\kappa$.

[1] Ovviamente in questo caso, non può valere l'ipotesi del continuo $\mathfrak{c} = \aleph_1$.