Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 18 Ottobre 2006

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $X_1 = \{f : A \to \mathbb{R} \mid A \subset \mathbb{R} \text{ finito } \}$, cioè l'insieme di tutte le funzioni a valori reali aventi come dominio un insieme finito di reali.
2. $X_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = |\mathbb{R} \setminus A| = |\mathbb{R}|\}$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di numeri reali aventi la potenza del continuo e il cui complementare abbia anch'esso la potenza del continuo.
3. $X_3 = V' = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ applicazione lineare}\}$, sapendo che lo spazio vettoriale V ha dimensione numerabile.

Esercizio 2. Determinare l'insieme di tutti gli ordinali α tali che $\alpha + \omega^3 = \omega^3 + \alpha$.

Esercizio 3. Il fattoriale di un ordinale si definisce ponendo per ricorsione transfinita:

$$= \begin{cases} 0! = 1 \\ (\alpha+1)! = \alpha! \cdot (\alpha+1) \\ \lambda! = \sup_{\alpha<\gamma} \alpha! \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Per induzione transfinita dimostrare che:

1. $\alpha! \leq \alpha^\alpha$ per ogni $\alpha \neq 0$.
2. $(\beta + \alpha)! \geq \beta^{1+\alpha}$ per ogni α, β.

Oltre ad $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, esistono altri ordinali α tali che $\alpha! = \alpha$?

Esercizio 4. Un cardinale non numerabile κ si dice *debolmente inaccessibile* se è regolare ma non è un cardinale successore. Dimostrare che:

1. Se κ è debolmente inaccessibile, allora κ è un punto fisso della funzione "aleph", cioè $\kappa = \aleph_\kappa$.
2. Se ν è il minimo ordinale (dunque cardinale) tale che $\nu = \aleph_\nu$, allora ν *non* è debolmente inaccessibile.

Esercizio 5. * Siano $A, B \subset \mathbb{R}^+$ due sottoinsiemi (non vuoti) di numeri reali positivi. Dimostrare che se A e B sono bene ordinati (con l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$), allora anche l'insieme somma $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ è bene ordinato.