Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 8 Settembre 2006
Soluzioni (a cura di M. Di Nasso)

**Esercizio 1.** Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $A_1 = \{f : A \to \mathbb{N} \mid A \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito }\}$, cioè l'insieme di tutte le funzioni con valori numeri naturali, e definite su sottoinsiemi infiniti di naturali.
2. $A_2 = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid |A| = |\mathbb{Q} \setminus A| = \aleph_0\}$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ che sono infiniti con complementare infinito.
3. $A_3 = \{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid |\mathcal{X}| = \aleph_0 \text{ e } \forall X \in \mathcal{X} \quad |X| < \aleph_0\}$, l'insieme di tutti i sottoinsiemi numerabili di sottoinsiemi finiti di numeri reali.
4. $A_4 = \{\mathcal{X} \mid X \cap X' = \emptyset \text{ per ogni } X \neq X' \text{ in } \mathcal{X}\,, \bigcup \mathcal{X} = \mathbb{R}\,, \text{ e } |\mathcal{X}| = \aleph_0\}$, cioè l'insieme di tutte le partizioni numerabili di $\mathbb{R}$.

**Soluzione.** (1) Abbiamo visto a lezione che l'insieme $\mathrm{Fin}(\mathbb{N}) = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid |B| = \aleph_0\}$ di tutti i sottoinsiemi finiti ha cardinalità numerabile $\aleph_0$. Dunque l'insieme di tutti i sottoinsiemi infiniti

$$\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| = \aleph_0\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$$

ha la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$.[1] Osserviamo che $A_1 = \bigcup \{X^{\mathbb{N}} \mid X \in \mathcal{X}\}$. Si tratta di una unione disgiunta perché funzioni con domini diversi sono diverse ($X^{\mathbb{N}} \cap Y^{\mathbb{N}} = \emptyset$ per $X \neq Y$). Inoltre, per ogni $X \in \mathcal{X}$, la cardinalità $|X^{\mathbb{N}}| = |{\aleph_0}^{\aleph_0}| = \mathfrak{c}$. Abbiamo dunque:

$$|A_1| = \sum_{X \in \mathcal{X}} |X^{\mathbb{N}}| = \max\{|\mathcal{X}|, \sup_{X \in \mathcal{X}} |X^{\mathbb{N}}|\} = \mathfrak{c}.$$

(2) Sia $\mathrm{Fin}(\mathbb{Q}) = \{X \subset \mathbb{Q} \mid |X| < \aleph_0\}$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Q}$. Poiché $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, anche $|\mathrm{Fin}(\mathbb{Q})| = |\mathrm{Fin}(\mathbb{N})| = \aleph_0$. Inoltre l'applicazione $X \mapsto \mathbb{Q} \setminus X$ determina una bigezione tra $\mathrm{Fin}(\mathbb{Q})$ e $\mathrm{Cofin}(\mathbb{Q}) = \{Y \subset \mathbb{Q} \mid |\mathbb{Q} \setminus Y| < \aleph_0\}$, l'insieme dei sottoinsiemi cofiniti (cioè aventi complementare finito). Dunque $|\mathrm{Cofin}(\mathbb{Q})| = \aleph_0$. Infine, notiamo che

$$A_2 = \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathrm{Fin}(\mathbb{Q}) \cup \mathrm{Cofin}(\mathbb{Q}))$$

è la differenza tra un insieme di cardinalità $\mathfrak{c}$, ed un insieme di cardinalità $\aleph_0$.

(3) Intanto banalmente $\mathfrak{c} \leq |A_3|$ (ad esempio, $r \longmapsto \mathcal{X}_r = \{\{r+n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \in A_3$ è una funzione iniettiva). L'insieme $\mathrm{Fin}(\mathbb{R}) = \{X \subset \mathbb{R} \mid |X| < \aleph_0\}$ dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$. Infatti $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\mathrm{Fin}(\mathbb{R})|$ (ad esempio, i singoletti $\{r\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{R})$ sono una quantità del continuo). Inoltre, ad esempio, l'applicazione che manda un sottoinsieme finito $\{r_1 < \ldots < r_n\}$ nella successione $\langle r_1, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è chiaramente iniettiva. Dunque $|\mathrm{Fin}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Si osservi adesso che:

$$A_3 = \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{Fin}(\mathbb{R})) \mid |\mathcal{X}| = \aleph_0\}.$$

[1] Ricordare che se $|Z| = \mathfrak{c}$ e $|W| = \aleph_0$, allora la differenza $|Z \setminus W| = \mathfrak{c}$.

Come abbiamo appena visto, $|\mathrm{Fin}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$, e dunque l'insieme $A_3$ ha la stessa cardinalità di $[\mathbb{R}]^{\aleph_0} = \{X \subset \mathbb{R} \mid |X| = \aleph_0\}$, l'insieme dei sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$. È immediato verificare che l'applicazione che associa ad ogni successione $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la sua immagine $\mathrm{Im} = \{\sigma(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, è suriettiva su $[\mathbb{R}]^{\aleph_0}$. Concludendo:

$$\mathfrak{c} \leq |A_3| = |[\mathbb{R}]^{\aleph_0}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}.$$

(4) Una partizione numerabile di $\mathbb{R}$ è un particolare elemento di $[\mathcal{P}(\mathbb{R})]^{\aleph_0}$, l'insieme dei sottoinsieme numerabile di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Analogamente a sopra, notiamo che ogni elemento di $[\mathcal{P}(\mathbb{R})]^{\aleph_0}$ si ottiene come immagine di una successione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Dunque

$$|A_4| \leq |[\mathcal{P}(\mathbb{R})]^{\aleph_0}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}| = (2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Per ottenere la disuguaglianza inversa $2^{\mathfrak{c}} \leq |A_4|$, possiamo considerare per ogni $Z \subseteq (0,1)$, la seguente partizione numerabile di $\mathbb{R}$: $\mathcal{X}_Z = \{Z, \mathbb{R}^+ \setminus Z, (-1,0], (-2,-1], (-3,-2], \ldots\}$. L'applicazione $Z \longmapsto \mathcal{X}_Z$ è iniettiva, dunque $2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}((0,1))| \leq |A_4|$.

**Esercizio 2.**

1. Determinare tutte le coppie di ordinali $(\alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta < \omega^2$ tali che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. Trovare esempi di ordinali $\alpha, \beta > \omega^2$ tali che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ma $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.

**Soluzione.** (1) Banalmente, la somma commuta quando almeno uno dei due ordinali è 0. Dunque nel seguito supporremo sempre che $\alpha, \beta \neq 0$. Considerando la divisione euclidea per $\omega$, possiamo scrivere gli ordinali $\alpha$ e $\beta$ nella forma:

$$\alpha = \omega \cdot n + m \qquad e \qquad \beta = \omega \cdot k + h$$

dove $n, m, h, k$ sono numeri naturali. Supponiamo prima che $n, k \neq 0$ siano entrambi diversi da zero. Usando la proprietà associativa, abbiamo:

$$\alpha + \beta = (\omega \cdot n + m) + (\omega \cdot k + h) = \omega \cdot n + (m + \omega \cdot k) + h = \omega \cdot n + \omega \cdot k + h = \omega(n + k) + h$$

Analogamente, $\beta + \alpha = \omega(k + n) + m$. Dunque, se $n, k \neq 0$, la somma commuta se e solo se $\alpha$ e $\beta$ sono "congrui modulo $\omega$", cioè i loro resti $m, h$ per la divisione con $\omega$ coincidono. Nel caso in cui $n = k = 0$, banalmente $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ perché si tratta di una somma tra numeri naturali. Se $n \neq 0$ ma $k = 0$, la somma non commuta perché $\alpha + \beta = \omega \cdot n + m + h$ mentre $\beta + \alpha = h + \omega \cdot n + m = \omega \cdot n + m$. Analogamente se $k \neq 0$ ma $n = 0$.

(2) Prendendo $\alpha = \omega^2 \cdot 2$ e $\omega^2 \cdot 3$ si ha $\alpha + \beta = \beta + \alpha = \omega^2 \cdot 5$; mentre $\alpha \cdot \beta = \omega^4 \cdot 3$ e $\beta \cdot \alpha = \omega^4 \cdot 2$.

**Esercizio 3.** Stabilire quali tra i seguenti 14 cardinali sono uguali tra loro:[2]

$$(1)\ {\aleph_0}^{\aleph_1};\quad (2)\ 2^{\mathfrak{c}};\quad (3)\ \aleph_1;\quad (4)\ {\aleph_0}^{\mathfrak{c}};\quad (5)\ \mathfrak{c};\quad (6)\ {\aleph_1}^{\aleph_0};\quad (7)\ \mathfrak{c}^{\aleph_1};$$

$$(8)\ 2^{\aleph_1};\quad (9)\ {\aleph_1}^{\mathfrak{c}};\quad (10)\ 2^{\aleph_0};\quad (11)\ \mathfrak{c}^{\aleph_0};\quad (12)\ {\aleph_1}^{\aleph_1};\quad (13)\ {\aleph_0}^{\aleph_0};\quad (14)\ \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$$

[2] Con $\mathfrak{c}$ si denota la cardinalità del continuo $\mathbb{R}$.

**Soluzione.** Intanto è ben noto che $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Abbiamo visto a lezione che l'elevazione a potenza conserva le disuguaglianze deboli. Partendo da $2 < \aleph_0 < \aleph_1 \leq \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, ed elevando ciascun termine prima ad $\aleph_0$, poi ad $\aleph_1$, e infine a $\mathfrak{c}$, otteniamo i seguenti tre gruppi di disuguaglianze:

$$2^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq {\aleph_1}^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$
$$2^{\aleph_1} \leq {\aleph_0}^{\aleph_1} \leq {\aleph_1}^{\aleph_1} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$$
$$2^{\mathfrak{c}} \leq {\aleph_0}^{\mathfrak{c}} \leq {\aleph_1}^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

Per Cantor-Bernstein, si ricavano così le uguaglianze tra (5) = (10) = (13) = (6) = (11), tra (8) = (1) = (12) = (7), e tra (2) = (4) = (9) = (14). Il termine (3) = $\aleph_1$ non è dimostrabilmente uguale a nessun altro. Precisamente, in ZFC, si possono dimostrare soltanto le disuguaglianze deboli $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1} \leq 2^{\mathfrak{c}}$, ma ciascuna delle tre potrebbe essere una disuguaglianza stretta (anche se non contemporaneamente).[3]

**Esercizio 4.** Dimostrare in dettaglio all'interno della teoria ZF che tutti gli insiemi totalmente ordinati finiti sono bene ordinati.

**Soluzione.** Procediamo per induzione sulla cardinalità finita $n$ dell'insieme totalmente ordinato $X$. Se $n = 0$ la tesi è vera a vuoto. Sia ora $|X| = n + 1$ e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme non vuoto. Prendo $a \in A$. Se $A = \{a\}$ consiste del solo elemento $a$, banalmente $\min A = a$. Altrimenti considero $A' = A \setminus \{a\}$ sottoinsieme non vuoto di $X' = X \setminus \{a\}$. Poiché $|X'| = n$ posso applicare l'ipotesi induttiva, ed ottenere l'esistenza di $a' = \min A'$. Chiaramente sarà $\min A = a'$ o $\min A = a$ a seconda che $a' < a$ oppure $a < a'$, rispettivamente.

**Esercizio 5.** Sia $\kappa$ un cardinale infinito, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ avente cardinalità $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Dimostrare che esiste un ordinale $\alpha$ con $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ tale che $f(\beta) < \alpha$ per ogni $\beta < \alpha$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.[4]

**Soluzione.** Visto che $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, l'insieme $X_0 = \{f(\gamma) + 1 \mid f \in \mathcal{F}, \gamma \leq \kappa\} \subseteq \kappa^+$ ha cardinalità minore o uguale a $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Ricordiamo che, in quanto successore, il cardinale $\kappa^+$ è regolare, e quindi non ha sottoinsiemi illimitati di cardinalità $\leq \kappa$. Allora $\alpha_1 = \sup X_0 < \kappa^+$, e quindi $|\alpha_1| \leq \kappa$. Analogamente a sopra, considero ora l'insieme $X_1 = \{f(\gamma)+1 \mid f \in \mathcal{F}, \gamma \leq \alpha_1\} \subseteq \kappa^+$. Anche $|X_1| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, e dunque $\alpha_2 = \sup X_1 < \kappa^+$. Iteriamo questa costruzione procedendo induttivamente. Precisamente definiamo per induzione su $n \in \omega$:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \kappa \\ \alpha_{n+1} = \sup\{f(\gamma) + 1 \mid f \in \mathcal{F}, \gamma \leq \alpha_n\} \end{cases}$$

L'ordinale $\alpha = \sup_n \alpha_n$ soddisfa le proprietà richieste. Intanto $\alpha \geq \alpha_0 = \kappa$; inoltre $\alpha < \kappa^+$, perchè cofinalità$(\kappa^+) = \kappa^+ > \aleph_0$. Prendiamo adesso un qualunque ordinale $\gamma < \alpha$, e una funzione $f \in \mathcal{F}$. Esisterà un $n \in \omega$ con $\gamma \leq \alpha_n$ e dunque, per definizione, $f(\gamma) < f(\gamma) + 1 \leq \alpha_{n+1} \leq \alpha$.

[3] Ad esempio, esistono modelli di ZFC dove $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (vale l'ipotesi del continuo) e quindi $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1} = 2^{\mathfrak{c}}$; ed altri modelli dove $\aleph_1 < 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\mathfrak{c}}$.

[4] Con $\kappa^+$ si denota il più piccolo cardinale maggiore di $\kappa$.