Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 21 Dicembre 2005

Cognome e nome:. . . . .

Numero di matricola:. . . . .

E-mail (per eventuali comunicazioni): . . . .

Tutte le risposte devono essere giustificate con una dimostrazione o con un controesempio.

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. L'insieme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ delle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, dove n, k sono naturali positivi.
2. L'insieme $\mathrm{Seq}(\mathbb{N})$ delle sequenze finite $\langle a_i \mid i \in n \rangle$ di numeri naturali.
3. L'insieme delle successioni convergenti di numeri reali:
$$\{s : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists l \in \mathbb{R} \lim_{n\to\infty} s(n) = l\,\}.$$

Esercizio 2. Se $\langle X, \leq \rangle$ è un insieme totalmente ordinato, la sua *cofinalità* $\mathrm{cof}(X)$ è così definita:
$$\mathrm{cof}(X) = \min\{\ \alpha \text{ ordinale } \mid \text{esiste } f : \alpha \to X \text{ crescente e illimitata}\,\}.$$

1. Dimostrare che $\mathrm{cof}(X)$ è un cardinale.
2. Dimostrare che per ogni cardinale infinito κ, $\mathrm{cof}(\kappa^+) = \kappa^+$.

[Ricordare che κ^+ è il cardinale *successore* di κ, cioè il più piccolo cardinale maggiore di κ.]

Esercizio 3. Sia κ un cardinale infinito e $\{\nu_i \mid i \in \kappa\}$ una famiglia di cardinali diversi da zero. Dimostrare che:
$$\sum_{i\in\kappa} \nu_i = \max\{\,\nu\,;\,\kappa\} \quad \text{dove} \quad \nu = sup\{\nu_i \mid i \in \kappa\}.$$

Esercizio 4. Sia $\alpha > 2$ un ordinale. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. α è *moltiplicativamente chiuso*, cioè se $\beta, \gamma < \alpha$ allora anche $\beta \cdot \gamma < \alpha$;
2. Per ogni $0 < \beta < \alpha$, $\beta \cdot \alpha = \alpha$;
3. Esiste δ tale che che $\alpha = \omega^{\omega^\delta}$.

Esercizio 5. Sia $(I, <)$ un insieme totalmente ordinato, e sia $\langle (B_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ una I-sequenza di insiemi totalmente ordinati. Sull'unione disgiunta $\coprod B_i = \bigcup\{B_i \times \{i\} \mid i \in I\}$ definiamo:
$$(x, i) \preceq (y, j) \quad \Leftrightarrow \quad i < j \ \vee\ (i = j \wedge x \leq_i y).$$

Dimostrare che

1. $(\coprod B_i, \prec)$ è un insieme totalmente ordinato;
2. $(\coprod B_i, \prec)$ è *bene ordinato* se e solo se $(I, <)$ e tutti i $(B_i, <_i)$ sono bene ordinati.