Elementi di Logica Matematica
Secondo Test del 3 Maggio 2005

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate.
Buon lavoro.

Esercizio 1. Per ogni $q \in \mathbb{Q}$, denotiamo con $\mathbb{Q}_q = \{q' \in \mathbb{Q} \mid q' < q\}$ il taglio di Dedekind generato da q. Ricordiamo che per ogni taglio di Dedekind $X \supset \mathbb{Q}_0$, si definiva

- $1/X = \mathbb{Q}_{1/q}$ se $X = \mathbb{Q}_q$ per qualche $q \in \mathbb{Q}$; $1/X = \{1/q \mid q \notin X\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$ altrimenti.

Dimostrare che per ogni taglio di Dedekind $X \supset \mathbb{Q}_0$, si ha $(X) \cdot (1/X) = \mathbb{Q}_1$.

Esercizio 2. Un insieme ordinato infinito $(A, <)$ si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso numerabile. Dimostrare che se A è separabile, allora $|A| \leq \mathfrak{c}$.

Esercizio 3. Dimostrare che i seguenti insiemi hanno la cardinalità del continuo:

1. $\mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n\ f(n) \neq n\}$;
2. $\mathcal{F}_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ bigezione}\}$;
3. $\mathcal{F}_3 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ illimitata}\}$;
4. $\mathcal{F}_4 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0\}$.

Esercizio 4. Sia $(A, <)$ un sottoinsieme *bene ordinato* di $(\mathbb{R}, <)$. Dimostrare che $|A| \leq \aleph_0$.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid |A| < \aleph_0\}$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$. Definiamo le relazioni:

- $A \prec_1 B \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in B \setminus A$ con $A \cap n = B \cap n$;
- $A \prec_2 B \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in B \setminus A$ con $\{a \in A \mid a > n\} = \{b \in B \mid b > n\}$.

Dimostrare che:

1. $(\mathcal{F}, \prec_1)$ è totalmente ordinato ma non bene ordinato;
2. $(\mathcal{F}, \prec_2)$ è bene ordinato;
3. $(\mathcal{F}, \prec_2)$ è isomorfo a $(\mathbb{N}, <)$.

FACOLTATIVO. Una famiglia $\mathcal{A}$ si dice *quasi disgiunta* se per ogni $A, A' \in \mathcal{A}$ con $A \neq A'$, l'intersezione $A \cap A'$ è finita. Dimostrare che esiste una famiglia quasi disgiunta di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ avente la cardinalità del continuo.
[Sugg. Senza perdita di generalità, al posto di $\mathbb{N}$ si può prendere un opportuno altro insieme di cardinalità numerabile.]