Elementi di Logica Matematica
Primo Test del 17 Marzo 2005
Soluzioni (a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1.

1. Dimostrare che vale l'implicazione $(\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(y)) \to (x \in y)$. Vale l'implicazione inversa?
2. Stabilire se ciascuna delle seguenti quattro proprietà vale o no.

(a) $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$; (b) $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$; (c) $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$; (d) $\mathcal{P}(\bigcup X) = \{\mathcal{P}(x) \mid x \in X\}$.

Soluzione. (1) Per definizione di insieme delle parti, $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(y)$ significa $\mathcal{P}(x) \subseteq y$. Ma banalmente $x \subseteq x$ è sottoinsieme di se stesso, dunque $x \in \mathcal{P}(x) \subseteq y$, e quindi $x \in y$.

(2a) Supponiamo che $\xi \in \bigcup \mathcal{P}(X)$. Per definizione di unione, $\xi \in A$ per qualche $A \in \mathcal{P}(X)$. Dunque $\xi \in A \subseteq X$, da cui $\xi \in X$. Questo dimostra l'inclusione $\bigcup \mathcal{P}(X) \subseteq X$. Viceversa, visto che $X \in \mathcal{P}(X)$, tutti gli elementi di X appartengono a $\bigcup \mathcal{P}(X)$, cioè $X \subseteq \bigcup \mathcal{P}(X)$.

(2b) Un facile controesempio a questa uguaglianza si ottiene prendendo $X = 1 = \{\emptyset\}$. Infatti in questo caso $\bigcup X = \emptyset$, perché l'unico elemento di X è $\emptyset$ che non ha elementi, e dunque $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X)) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2 \neq 1 = X$.

(2c) Se $x \in X$, allora ogni suo elemento $y \in x$ appartiene a $\bigcup X$, cioè $x \subseteq \bigcup X$. Dunque tutti gli elementi $x \in X$ sono elementi di $\mathcal{P}(\bigcup X)$, cioè $X \subseteq \mathcal{P}(\bigcup X))$. Concludiamo che $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$.

In conseguenza di questo risultato, si può vedere che l'uguaglianza del punto precedente (2b) non vale mai. Infatti, qualunque sia X, da $X \subseteq \mathcal{P}(\bigcup X)$ segue che $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$. Per il Teorema di Cantor, $|X| < |\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))|$, e dunque l'uguaglianza $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$ è impossibile.

(2d) Facili controesempi a questa uguaglianza si ottengono prendendo singoletti del tipo $X = \{\xi\}$ dove $\xi \neq \emptyset$. In questo caso infatti $\{\mathcal{P}(x) \mid x \in X\} = \{\mathcal{P}(\xi)\}$ è anch'esso un singoletto, mentre $\mathcal{P}(\bigcup X) = \mathcal{P}(\xi)$ contiene almeno due elementi, cioè $\emptyset$ e ξ.[1]

Esercizio 2. Per ogni insieme x, denotiamo $\widehat{x} = x \cup \{x\}$.

1. Dimostrare che ω è transitivo, cioè che se $n \in \omega$ e $x \in n$, allora $x \in \omega$;
2. Dimostrare che $\forall n, m \in \omega \ \ (\widehat{n} \in \widehat{m}) \to (n \in m)$;
3. Dimostrare che $(\widehat{x} \in \omega) \to (x \in \omega)$.

Soluzione. (1) Per induzione, dimostriamo che la proprietà $P(n) :\ \forall x\ (x \in n \to x \in \omega)$ vale per ogni $n \in \omega$. La base $P(0)$ è vera a vuoto (non esistono $x \in 0$!). Nel passo induttivo $P(\widehat{n})$, supponiamo che $x \in \widehat{n} = n \cup \{n\}$. Si hanno le due possibilità $x \in n$ o $x \in \{n\}$. Nel primo caso, si ottiene $x \in \omega$ applicando l'ipotesi induttiva $P(n)$. Nel secondo caso, necessariamente $x = n$, e dunque $x \in \omega$.

(2) Per dimostrare questa proprietà non è necessaria l'induzione. Se $\widehat{n} \in \widehat{m}$, allora $\widehat{n} \in m$ o $\widehat{n} = m$. Nel primo caso, $n \in \widehat{n} \in m$, e dunque $n \in m$ per la transitività della relazione $\in$ su ω. Nel secondo caso, $n \in \widehat{n} = m$.

[1] L'esistenza dell'insieme $\{\mathcal{P}(x) \mid x \in X\}$ segue per separazione, notando che:

$$\{\mathcal{P}(x) \mid x \in X\} = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X)) \mid \exists x \in X\ z = \mathcal{P}(x)\}.$$

(3) Per la proprietà dimostrata al punto (1), da $x \in \widehat{x} \in \omega$ segue che $x \in \omega$.

Attenzione! Non ha senso procedere per induzione considerando la proprietà $P(x): \ (\widehat{x} \in \omega) \to (x \in \omega)$. Infatti non sappiamo se x è un numero naturale (anzi, è proprio quello che dobbiamo dimostrare!)

Esercizio 3. Potendo usare soltanto gli assiomi dell'*insieme vuoto*, della *coppia* e della *potenza*, si può costruire un insieme con 5 elementi? E potendo usare soltanto gli assiomi dell'*insieme vuoto*, della *potenza* e della *unione*?

Soluzione. Se l'insieme x è costruito applicando soltanto gli assiomi dell'insieme *vuoto*, della *coppia*, e della *potenza*, allora necessariamente la sua cardinalità $|x| = 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, oppure $x = \emptyset$. Infatti, applicando l'assioma della coppia si possono ottenere soltanto insiemi $\{a, b\}$ di cardinalità $2 = 2^1$ oppure di cardinalità $1 = 2^0$ (quando $a = b$). Applicando l'assioma della potenza, si ha che $|y| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(y)| = 2^n$, ed anche in questo caso otteniamo soltanto insiemi la cui cardinalità è una potenza di 2. In particolare, non si possono costruire insiemi di cardinalità 5.

Definiamo induttivamente $V_0 = \emptyset$ e $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$. Dunque $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \{\emptyset\}$, $V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $V_3 = \mathcal{P}(V_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e così via. Osserviamo che un insieme x è costruito applicando soltanto gli assiomi dell'insieme *vuoto*, della *potenza*, e della *unione*, se e solo se $x = V_n$ per qualche n (in particolare non si possono costruire insiemi con 5 elementi). Da un lato, banalmente tutti gli insiemi V_n sono ottenuti da quegli assiomi. Viceversa, applicando l'assioma delle parti e della unione a quegli insiemi, non otteniamo "nuovi" insiemi, ma ancora insiemi del tipo V_n. Infatti, per definizione, $\mathcal{P}(V_n) = V_{n+1}$. Inoltre $\bigcup V_0 = V_0$ e $\bigcup V_{n+1} = \bigcup \mathcal{P}(V_n) = V_n$, per la (2a) dell'esercizio 1.

Esercizio 4. Siano A, B, C tre insiemi con B e C disgiunti. Dimostrare che $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$.

Soluzione. Per ogni funzione $f : B \cup C \to A$, denotiamo con $f|_B = \{(b, a) \in f \mid b \in B\}$ e con $f|_C = \{(c, a) \in f \mid c \in C\}$ le restrizioni di f agli insiemi B e C rispettivamente. Consideriamo l'applicazione $\Psi : A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$ dove $f \mapsto (f|_B, f|_C)$. Se $f \neq g$, allora esiste almeno un elemento $x \in B \cup C$ con $f(x) \neq g(x)$. Se $x \in B$, allora $f|_B(x) = f(x) \neq g(x) = g|_B(x)$, e dunque $f|_B \neq g|_B$. Analogamente, se $x \in C$, allora $f|_C \neq g|_C$. In ogni caso $\Psi(f) = (f|_B, f|_C) \neq (g|_B, g|_C) = \Psi(g)$, e questo dimostra l'iniettività di Ψ. Per la suriettività, prendiamo due funzioni qualunque $f_1 : B \to A$ e $f_2 : C \to A$. Visto che gli insiemi $B \cap C = \emptyset$ sono disgiunti, è facile vedere che l'unione $f = f_1 \cup f_2$ è una funzione $f : B \cup C \to A$, tale che che $f|_B = f_1$ e $f|_C = f_2$. Dunque $\Psi(f) = (f_1, f_2)$ come voluto.

Esercizio 5.

1. Sia $[\mathbb{R}]^\omega = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid |X| = |\mathbb{N}|\}$. Dimostrare che $|[\mathbb{R}]^\omega| = |\mathbb{R}|$.
2. Sia $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ è crescente}\}$. Dimostrare che $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}|$.
3. Sia $\mathcal{G} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \text{ è non decrescente}\}$. Dimostrare che $|\mathcal{G}| = |\mathbb{R}|$.

   [Sugg. Dimostrare prima che ogni $g \in \mathcal{G}$ ha al più una infinità numerabile di punti di discontinuità.]

Soluzione. (1) Sia $[\mathbb{R}]^{\leq\omega} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq |\mathbb{N}|\}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di cardinalità *al più* numerabile. Chiaramente $[\mathbb{R}]^\omega \subset [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$. Consideriamo l'applicazione $\Psi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ dove $\Psi(f) = \mathrm{Im}(f)$. Ogni sottoinsieme al più numerabile di $\mathbb{R}$ è l'immagine di qualche successione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dunque Ψ è suriettiva. Abbiamo allora:

$$|[\mathbb{R}]^\omega| \leq |[\mathbb{R}]^{\leq\omega}| \leq |\mathbb{R}^\mathbb{N}| = |(2^\mathbb{N})^\mathbb{N}| = |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |2^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|.$$

Viceversa, consideriamo l'applicazione $\Phi : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^\omega$ dove $r \mapsto \{r+n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se $r < r'$ allora $r = r+0 \in \Phi(r)$ ma $r \notin \Phi(r')$ perché $r < r'+n$ per ogni n. Dunque $\Phi(r) \neq \Phi(r')$ e Φ è iniettiva. Otteniamo così anche la disuguaglianza $|\mathbb{R}| \leq |[\mathbb{R}]^\omega|$, e la tesi $|[\mathbb{R}]^\omega| = |[\mathbb{R}]^{\leq\omega}| = |\mathbb{R}|$ segue per il Teorema di Cantor-Bernstein.

(2) Intanto $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}^\mathbb{N}$, dunque $|\mathcal{F}| \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Uno dei modi per dimostrare l'altra disuguaglianza è il seguente. Per ogni $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, definiamo $\widehat{f}(n) = \sum_{i=0}^n (f(i)+1)$. Chiaramente $\widehat{f}(n+1) > \widehat{f}(n)$, dunque $\widehat{f}$ è crescente. Inoltre, se $f \neq g$ e $k = \min\{n \mid f(n) \neq g(n)\}$, allora $\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = (f(k)+1) - (g(k)+1) \neq 0$. Dunque l'applicazione $\Phi : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathcal{F}$ dove $f \mapsto \widehat{f}$ è iniettiva, e $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}^\mathbb{N}| \leq |\mathcal{F}|$ come volevamo.

(3) Intanto $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{G}|$. Questo si vede subito ad esempio notando che le funzioni $g_r(x) = x + r$ al variare di $r \in \mathbb{R}$ sono tutte crescenti, e che $g_r \neq g_s$ quando $r \neq s$.

Ogni $g \in \mathcal{G}$ è continua ovunque, tranne al più in una quantità numerabile di punti. In altre parole, se $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ punto di discontinuità per } g\}$, allora $|D_g| \leq |\mathbb{N}|$. Per dimostrare questa proprietà, osserviamo che $x \in D_g$ se e solo se x è un punto di "salto", cioè se e solo se $g_-(x) = \sup\{g(y) \mid y < x\} < \inf\{g(y) \mid y > x\} = g_+(x)$. Per ogni $x \in D_g$, scegliamo un numero razionale q_x nell'intervallo aperto $(g_-(x), g_+(x))$. Chiaramente l'applicazione $\phi_g : D_g \to \mathbb{Q}$ dove $\phi_g(x) = q_x$ è iniettiva, e dunque $|D_g| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, come voluto.

Per concludere l'esercizio, dimostriamo che $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$, dove

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ha al più una infinità numerabile di punti di discontinuità}\}.$$

Visto che $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, avremmo così che $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{G}| \leq |\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$, e quindi sia $\mathcal{G}$ che $\mathcal{C}$ hanno la cardinalità del continuo. Per ogni $A \subset \mathbb{R}$ con $|A| \leq |\mathbb{N}|$, cioè per ogni $A \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$, denotiamo con

$$\mathcal{C}_A = \{f : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}.$$

È facile vedere che $\mathbb{R} \setminus A$ ha un sottoinsieme denso numerabile (ma non possiamo considerare direttamente $\mathbb{Q}$ perché potrebbe essere $A = \mathbb{Q}$!). Usando la *separabilità* di $\mathbb{R}$, cioè la proprietà che $\mathbb{R}$ ammette un sottoinsieme denso numerabile, abbiamo visto a lezione che l'insieme di tutte le funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$. In modo del tutto analogo, si può dimostrare allora che per ogni $A \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$, $|\mathcal{C}_A| = |\mathbb{R}|$, cioè esiste una bigezione $\psi_A : \mathbb{R} \to \mathcal{C}_A$. Notiamo ora che $\mathcal{C}$ si può scrivere come unione disgiunta:

$$\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{C}_A \mid A \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}\},$$

e definiamo la mappa $\Psi : [\mathbb{R}]^{\leq\omega} \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ ponendo $\Psi(A, r) = \psi_A(r)$. Chiaramente Ψ è una bigezione, e dunque $|\mathcal{C}| = |[\mathbb{R}]^{\leq\omega} \times \mathbb{R}| =$ (per quanto visto al punto (1)) $= |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.